
PRIMER LUGAR EN EL CONCURSO DE CARTELES “CARLOS GRAEF
FERNÁNDEZ” DEL LXII CONGRESO NACIONAL DE FÍSICA 2019

DISPERSIÓN DE HOYOS NEGROS: HAYWARD

—

Pedro Josué Hernández Penagos¹
pedrojosuehernandez01@gmail.com

Omar Pedraza Ortega²
omarp@uaeh.edu.mx

Roberto Arceo Reyes¹
roberto.arceo@unach.mx

1 FACULTAD DE CIENCIAS EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE CHIAPAS, MÉXICO

2 ÁREA ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DEL ESTADO DE HIDALGO, MÉXICO



Para citar este artículo:

Fraga R. Evelyn L. (2020). [Reseña del libro Planificación para el desarrollo en América Latina y el Caribe. Enfoque, experiencias y perspectivas, de Máttar, J., & Cuervo, L. M.]. *Espacio I+D, Innovación más Desarrollo*. IX(22), 179-186. Recuperado de https://espacioimasd.unach.mx/docs/Dispersion_de_Hoyos_Negros_Hayward.php

RESUMEN

Se hace un análisis sobre problemas de dispersión de ondas planas que incide en un agujero negro. En este trabajo en particular, se trabaja con un agujero negro de Hayward, utilizando la ecuación de Klein-Gordon para un campo escalar sin masa y se resuelve numéricamente la ecuación diferencial obtenida para encontrar la sección eficaz diferencial.

Los agujeros negros son objetos tan compactos que ni siquiera la luz puede escapar de su atracción gravitacional. En la actualidad, la existencia de agujeros negros supermasivos (millones de veces la masa del sol) en el centro de muchas galaxias, y de agujeros negros más pequeños (5-10 veces la masa del sol) en sistemas binarios de rayos X es generalmente aceptada [1].

El agujero negro de Schwarzschild, es el más sencillo, posee simetría esférica y es descrito por el elemento de línea

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (1)$$

aquí, M es la masa del agujero negro (en unidades naturales).

En este trabajo, estudiaremos problemas de dispersión que involucren agujeros negros. Este problema es semejante a un problema de dispersión, donde el índice de refracción del medio no es constante. En el caso de los agujeros negros, la curvatura del espacio tiempo produce el efecto dispersivo de las ondas incidentes.

Consideremos una onda plana $\psi(z) = e^{i\omega z}$ que incide en el agujero negro. La información del agujero negro se encuentra codificada en un potencial efectivo de largo alcance. El efecto del potencial efectivo en la onda plana incidente modifica las expresiones estándar (espacio plano) para la amplitud de dispersión.

La onda dispersada (ver figura 1) puede ser expresada como

$$\psi(r, \theta) \approx A e^{i\omega z} + f(\theta) \frac{e^{i\omega r}}{r};$$

$$f(\theta) = \frac{1}{2i\omega} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(S_l - 1) P_l(\cos \theta), \quad (2)$$

donde $f(\theta)$ es la amplitud de dispersión, S_l es la matriz S y $P_l(\cos \theta)$ son los polinomios de Legendre de orden l .

De la amplitud de dispersión, se obtiene la sección eficaz diferencial transversal [2], dado por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2. \quad (3)$$

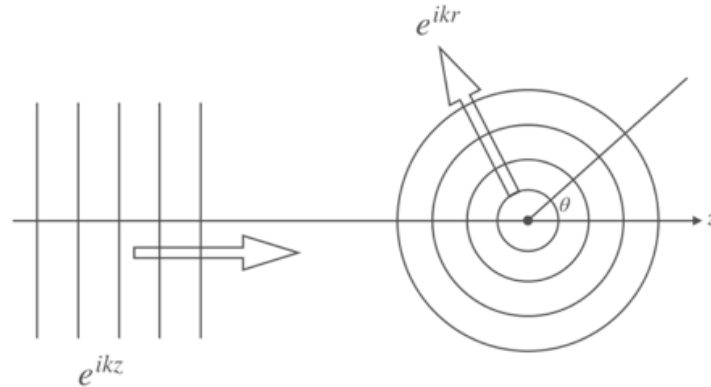


Figura 1. Onda plana incidente viajando en el eje z y la onda esférica dispersada

ECUACIÓN DE CAMPO ESCALAR Y POTENCIAL EFECTIVO

La referencia [3] describe un agujero negro regular, este modelo posee simetría esférica, es asintóticamente plano y no tiene singularidades en $r = 0$.

El elemento de línea del espacio-tiempo del agujero negro regular de Hayward es

$$ds^2 = -F(r)dt^2 + \frac{dr^2}{F(r)} + r^2 d\Omega^2, \quad F(r) = 1 - \frac{2Mr^2}{r^3 + 2M\epsilon^2}, \quad (4)$$

donde M representa la masa del agujero negro, el parámetro ϵ está asociado a una constante cosmológica. Para $\epsilon = 0$, la métrica de Hayward se reduce a la métrica de Schwarzschild.

El agujero negro regular de Hayward describe el comportamiento de un agujero negro que se está colapsando o que se está evaporando y puede tener uno o dos horizontes de eventos, dependiendo de la relación entre la masa y el parámetro ϵ .

Consideremos un campo escalar sin masa ψ que se propaga en el espacio tiempo de Hayward. La ecuación que gobierna la evolución del campo escalar es

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \psi) = 0. \quad (5)$$

Para ondas planas monocromáticas, tenemos

$$\psi_\omega = \sum_{l,m} \frac{\phi_l(r)}{r} Y_l^m(\theta, \varphi) e^{-i\omega t}. \quad (6)$$

con $\psi_\omega = Y_l^m(\theta, \varphi)$ los armónicos esféricos. Substituyendo (6) en (5), se obtiene la siguiente ecuación

$$F(r) \frac{d}{dr} \left[F(r) \frac{d}{dr} R_l(r) \right] + [\omega^2 - V(r)] R_l(r) = 0, \quad (7)$$

donde hemos considerado que $\varphi = 0$. El potencial efectivo $V(r)$ esta dado por

$$V(r) = F(r) \left[\frac{1}{r} \frac{dF(r)}{dr} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right]. \quad (8)$$

El potencial efectivo es graficado en la figura 2.

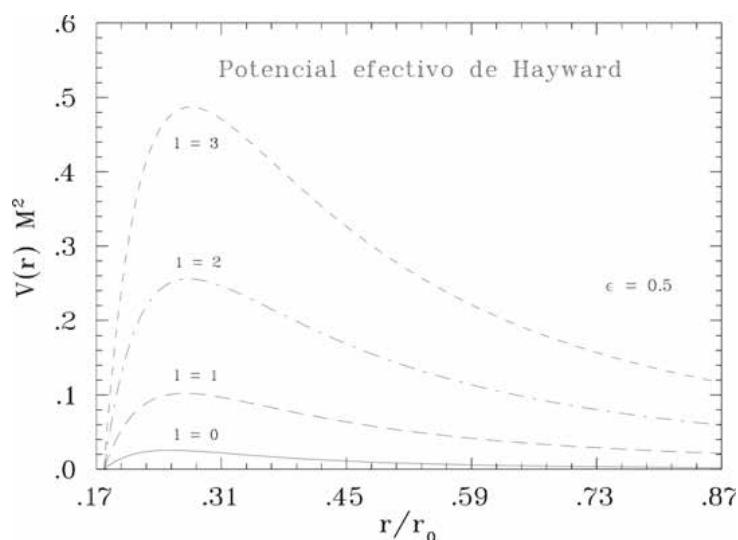


Figura 2. Potencial efectivo (8) para una onda escalar en un agujero negro de Hayward, con $l = 0, 1, 2, 3$ para $M = 1$ y $\epsilon = 0.5$

SOLUCIÓN NUMÉRICA

La solución a la ecuación (7) es posible utilizando un método numérico, definiendo los valores de la función en cantidades discretas sobre una malla de espaciamiento nodal uniforme. La ecuación diferencial se convierte en una ecuación en diferencias finitas y puede ser resuelta a lo largo de una malla calculando nuevos valores de la función de valores conocidos previamente.

Utilizando la expansión de Taylor a segundo orden para una función $u(r)$. Resolviendo para la primera y segunda derivada de $u(r)$ (ecuaciones (3.5) y (3.26) de [4]) se tiene

$$u_i' \approx \frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}; \quad u_i'' \approx \frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}; \quad (9)$$

donde h es el intervalo entre los nodos y el subíndice en u etiqueta el punto nodal. Sustituyendo en la ecuación (7) y despejando u_{i+1}

$$u_{i+1} = \frac{2F(r)h^2}{2F(r)+\frac{dF(r)}{dr}} \left[\frac{2u_i-u_{i-1}}{h^2} + \frac{\frac{dF(r)}{dr}}{F(r)} \frac{u_{i-1}}{2h} + \frac{1}{F(r)} [\omega^2 - V(r)]u_i \right] \quad (10)$$

La amplitud de dispersión $f(\theta)$ puede reescribirse de la siguiente forma [4]

$$f(\theta) = \frac{1}{2i\omega} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(S_l-1)P_l(\cos\theta) \quad (11)$$

en donde S_l recibe el nombre de **matriz S**. La cual está dada como

$$S_l = \frac{u_l(r_{n-1})r_n h_l^{(-)}(\omega r_n) - u_l(r_n)r_{n-1} h_l^{(-)}(\omega r_{n-1})}{u_l(r_n)r_{n-1} h_l^{(+)}(\omega r_{n-1}) - u_l(r_{n-1})r_n h_l^{(+)}(\omega r_n)} \quad (12)$$

aquí $h_l^{(\pm)}(\omega r_n)$ son las funciones esféricas de Hankel y $u_l(r_n)$ son las soluciones de la ecuación (10).

RESULTADOS

En la siguiente figura se muestra la sección eficaz diferencial de dispersión calculada numéricamente y la aproximación de Gloria.

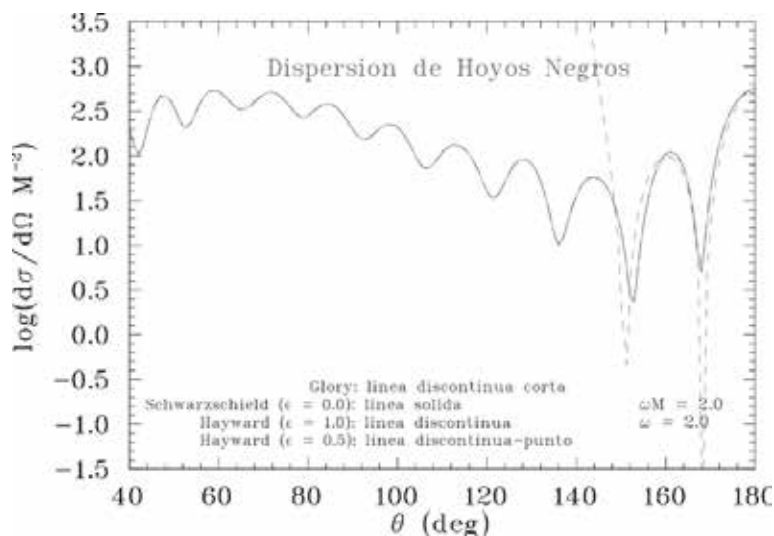


Figura 3. Sección eficaz diferencial para la métrica de Hayward

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

- Los resultados obtenidos coinciden con la fórmula para la dispersión de Gloria.
- Analizar el problema de dispersión de agujeros negros considerando campos electromagnéticos y gravitacionales.
- También se pueden analizar otros escenarios de agujeros negros.



REFERENCIAS

- [1] N. Andersson and B. P. Jensen, (2001). arXiv:gr-qc/0011025
- [2] D. J., Griffiths, (2005), *Introduction to Quantum Mechanics*, USA, Pearson Education, Inc.
- [3] S. A. Hayward,(2005), arXiv:gr-qc/0506126.
- [4] Gibbs, W. R. *Computation in Modern Physics*; 3rd Ed., Singapore, MI, USA, 2006.

ANEXO

