Razonamiento Matemático

Cuaderno didáctico

Enoch Yamil Sarmiento Martínez
Pedro Antonio Chambe Morales
Zoily Mery Cruz Sánchez
José Bulmaro Díaz Fonseca
Blanca Estela Molina Figueroa
Laura De Jesús Velasco Estrada

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE CHIAPAS
UNACH
POR LA CONCIENCIA DE LA NECESIDAD DE SERVIR
ESPACIO
INNOVACIÓN · DESARROLLO

·Colección Universitaria·
— Letras sin papel —

Razonamiento Matemático
- Cuaderno didáctico -

Enoch Yamil Sarmiento Martínez
Pedro Antonio Chambe Morales
Zoily Mery Cruz Sánchez
José Bulmaro Díaz Fonseca
Blanca Estela Molina Figueroa
Laura De Jesús Velasco Estrada

Colección eBooks

UNACH, 2019

Letras sin papel

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO
- CUADERNO DIDÁCTICO -

· Blanca Estela Molina Figueroa ·
· Enoch Yamil Sarmiento Martínez ·
· Pedro Antonio Chambe Morales ·
· Zoily Mery Cruz Sánchez ·
· José Bulmaro Díaz Fonseca ·
· Blanca Estela Molina Figueroa ·
· Laura De Jesús Velasco Estrada ·

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE CHIAPAS

Razonamiento Matemático
- Cuaderno didáctico -

— UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS —
Dirección de Divulgación Editorial Digital de
Universidad Virtual

www.unach.mx

Dirección Editorial • Lucia G. León Brandi
Diseño & Maquetación • Joshep Fabian Coronel Gómez

Primera Edición Electrónica
Octubre, 2019

Primera Edición Impresa
2015

ISBN Electronico: En trámite

Prólogo

El objetivo fundamental de la edición del cuaderno didáctico: Razonamiento Matemático es proporcionar una herramienta didáctica que permita conocer y analizar los conceptos básicos que rigen a la teoría de conjuntos y con ello ir construyendo los fundamentos del álgebra elemental.

El objetivo guiador en la elaboración y diseño de esta obra es lograr la vinculación concepto-algoritmo de cierto contenido matemático. En la que un concepto no puede ser reducido a su definición, si se está interesado en su aprendizaje y en su enseñanza, sino que es a través de situaciones problema por resolver como un concepto adquiere sentido para el estudiante, en donde el maestro no debería efectuar la comunicación de un conocimiento, sino la transmisión del problema adecuado que exija, por parte del alumno, poner en acción el conocimiento considerado. Algoritmo: Es una regla (o conjuntos de reglas) que permite, para todo problema de una clase dada con anterioridad, conducir a una solución, si existe una, o dado el caso, mostrar que no hay solución. Es decir se necesita desmecanizar las matemáticas para así razonar las matemáticas en la que por su naturaleza es una ciencia que requiere razonamiento y no mecanización de procesos.

Al inicio de cada unidad temática, se ha señalado en un recuadro al margen superior derecho de la página el número de dicha unidad, a la izquierda del cual se encuentra el título de la misma. Asimismo se van enumerando las unidades de trabajo en las que se subdivide cada unidad temática, antes de iniciar con las series de ejercicios respectivas.

Antes de abordar un tema nuevo, se incluyen las definiciones o conceptos básicos necesarios para la resolución de los ejercicios relacionados con dichos temas. Éstos, se incluyeron en un recuadro que en la parte superior izquierda contiene la leyenda ***Def.*** con el fin de catalogar el contenido. Las palabras clave se han resaltado con el propósito de facilitar la identificación de conceptos importantes.

Seguidamente se encuentran las instrucciones de la actividad a realizar. A la izquierda de las cuales se ha colocado el icono  que nos proporciona información sobre dicha actividad: El primer número corresponde a la unidad temática a la que pertenece dentro del cuaderno, el segundo indica el número de unidad de trabajo y el tercero el lugar que ocupa la serie de ejercicios dentro de dicha unidad.

Algunos ejercicios requieren de instrucciones adicionales debido a que no pueden resolverse empleando únicamente los conceptos ya manejados. En éstos casos, se ha colocado después de las instrucciones un recuadro con la etiqueta:  **Procedimiento** que indica los pasos a seguir para resolver la serie de ejercicios que se marcan a continuación.

Después de las instrucciones, o en su caso después del procedimiento, se ha incluido en la mayor parte de los ejercicios que así lo requieran, algunos ejemplos que facilitarán la comprensión de la actividad a realizar. Tales ejemplos se encuentran en un recuadro con la etiqueta:  **Ejemplos** para facilitar su identificación.

La cantidad de ejercicios varía de una actividad a otra, dependiendo la importancia y trascendencia del tema con respecto a los temas que se analizarán más adelante. Es decir, se ha procurado aumentar las operaciones que requieren mayor práctica y disminuir aquellas que se realizarán de manera implícita dentro de las actividades futuras.

En la parte final se incluye la solución a los ejercicios propuestos, para una posible comparación de resultados.

Índice

Unidad Temática 1

Lógica Matemática y Conjuntos

1. Proposiciones Cerradas

Def. Una ***proposición lógica*** es una expresión que puede calificarse como verdadera o como falsa.

1.1.1 ESCRIBE UNA **P** SOBRE LA LÍNEA SI LA EXPRESIÓN ES UNA PROPOSICIÓN LÓGICA Y ESCRIBE UNA **N**, SI NO LO ES.

Ejemplos

- El maestro de Historia es alto **P** (puede ser falso o verdadero)
- Préstame tu cuaderno **N** (no puede evaluarse)

A. Cristóbal Colón descubrió América en 1542 ____________
B. Adiós, amigos ____________
C. El pulmón forma parte del aparato digestivo ____________
D. ¿Cuántos alumnos hay en tu grupo? ____________
E. El número 173 es impar ____________
F. La luz de una lámpara ____________
G. $8 - 7 < 3 - 8a$ ____________
H. $A = (b \times h)/2$ ____________
I. Quiero agua ____________
J. La suma de dos números es mayor que ambos ____________

1.1.2 ESCRIBE EN EL PARÉNTESIS EL VALOR DE VERDAD (V o F) DE LAS SIGUIENTES PROPOSICIONES.

a = El león es un insecto ( )
b = El 28 es un número impar ( )
c = Benito Juárez gobernó en Oaxaca ( )
d = 3 + 8 es menor que 2 + 11 ( )
e = Los árboles son seres vivos ( )
f = La suma de los números 14 y 20 es 30 ( )
g = El metro cúbico no es una unidad para superficies ( )
h = El número 99 es primo ( )

Def. Algunos enunciados (proposiciones lógicas) son ***compuestos***, es decir, están formados de enunciados ***simples*** y de varios conectivos.
Las expresiones ***conectivas lógicas*** son: no, y, o, si... entonces, si y solo sí.

1.1.3 ESCRIBE UNA **S**, SI EL ENUNCIADO ES SIMPLE O **C**, SI SE TRATA DE UN ENUNCIADO COMPUESTO. SUBRAYA LOS CONECTIVOS.

Ejemplos

- Las rosas son rojas y las violetas azules — **C**
- Si el cielo está oscuro entonces hace frío — **C**
- El queso es un lácteo — **S**

A. El número 3 es par ____________
B. El 9 es un número impar y es primo ____________
C. Él estudió inglés o él vivió en Inglaterra ____________
D. El agua no tiene sabor ____________
E. 6 + 6 = 12 si, y solamente si, 2 x 6 = 12 ____________
F. La niña es grande o es muy pequeña ____________
G. Si el ejemplo es fácil entonces todos entienden ____________
H. El pie es una parte del cuerpo ____________
I. Si no está nublado entonces el sol alumbra ____________
J. 12 es menor que 20 y 20 es mayor que 8 ____________

2. Operaciones Lógicas

1.2.1 REPRESENTA SIMBÓLICAMENTE LOS SIGUIENTES CONECTIVOS.

No ____________
Y ____________
O ____________
Si... Entonces ____________
Si y solo si ____________

Def. Dado un enunciado *p*, se puede formar otro enunciado que se llama ***negación*** de *p*, insertando en *p* la palabra "no", o escribiendo "es falso que" antes de *p*. La negación se denota simbólicamente por $\sim p$.

1.2.2 ESCRIBE LA NEGACIÓN DE LAS SIGUIENTES PROPOSICIONES Y CALIFICA AMBAS CON SU VALOR DE VERDAD.

Ejemplos

r: Francia está en América (F)

~r: Francia no está en América (V)

q: 15 es menor que 12 (   )

~q: ______________________________ (   )

p: 2^4 es un número primo (   )

~p: ______________________________ (   )

s: Canadá está en América (   )

~s: ______________________________ (   )

1.2.3 SEAN p: "HACE MUCHO FRIO" Y q: "LLUEVE". DESCRIBIR CON UN ENUNCIADO VERBAL LAS SIGUIENTES ASERCIONES.

Ejemplos

- $\sim p$ No hace mucho frío.
- $p \rightarrow \sim q$ Si hace mucho frío entonces no llueve.

1. $p \wedge q$ ______________________________
2. $q \leftrightarrow p$ ______________________________
3. $q \vee \sim p$ ______________________________
4. $p \leftrightarrow \sim q$ ______________________________
5. $\sim \sim q$ ______________________________
6. $(p \wedge \sim q) \rightarrow p$ ______________________________

1.2.4 SEAN p: "EL ES FUERTE" Y q: "EL ES GUAPO". ESCRIBIR LOS SIGUIENTES ENUNCIADOS EN FORMA SIMBÓLICA CON p Y q.

Ejemplos

- El es fuerte pero no guapo $p \wedge \sim q$
- No es verdad que él es débil o que no es guapo $\sim(\sim p \vee \sim q)$

1. Él es fuerte y guapo ______________
2. Es falso que él es débil o guapo ______________
3. Él no es ni fuerte ni guapo ______________
4. Él es fuerte, o él es débil y guapo ______________

Def. Una ***Tabla de verdad*** es un procedimiento gráfico que nos permite determinar los posibles valores de verdad en una proposición compuesta, a partir de las combinaciones de los valores de verdad de sus proposiciones simples.

1.2.5 ESCRIBE LA TABLA DE VERDAD DE CADA OPERACIÓN LÓGICA.

Procedimiento

- ✓ Se escriben las posibles combinaciones de los valores de verdad de p y q.
- ✓ Si p es verdadero y q es verdadero, entonces $p \wedge q$ es verdadero; en cualquier otro caso $p \wedge q$ es falso.
- ✓ Si p es verdadero o q es verdadero o si ambos p y q son verdaderos, entonces $p \vee q$ es verdadero; si ambos son falsos $p \vee q$ es falso.
- ✓ Si p es verdadero, entonces $\sim p$ es falso; si p es falso, entonces $\sim p$ es verdadero.
- ✓ El condicional $p \rightarrow q$ es verdadero a menos que p sea verdadero y q sea falso.
- ✓ Si p y q tienen el mismo valor de verdad, entonces $p \leftrightarrow q$ es verdadero, si p y q tienen valores de verdad opuestos, entonces $p \leftrightarrow q$ es falso.

1. Conjunción $p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$

2. Disyunción $p \vee q$

p	q	$p \vee q$

3. Negación $\sim p$

p	$\sim p$

4. Condicional $p \rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$

5. Bicondicional $p \leftrightarrow q$

p	q	$p \leftrightarrow q$

1.2.6 CONSTRUYE LA TABLA DE VERDAD DE LAS SIGUIENTES PROPOSICIONES COMPUESTAS.

1. $\sim p \wedge q$

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$

2. $\sim (p \wedge \sim q)$

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim (p \wedge \sim q)$

3. $\sim(p \rightarrow \sim q)$

p	q	$\sim q$	$p \rightarrow \sim q$	$\sim(p \rightarrow \sim q)$

4. $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

Def. Una proposición ***tautológica*** es una proposición compuesta que es verdadera en todos los casos, sin importar el valor de verdad de sus proposiciones simples que la componen.
Una proposición ***contradictoria*** es aquella proposición compuesta que es falsa en todos los casos, cualquiera que sea el valor de verdad de sus proposiciones simples componentes.
Una proposición ***indeterminada*** o ***contingente*** es una proposición compuesta que en algunos casos es verdadera, y falsa en otros, dependiendo del valor de verdad de las proposiciones simples que la componen.

1.2.7 REALIZAR LAS TABLAS DE VERDAD DE LAS SIGUIENTES OPERACIONES LÓGICAS Y ESCRIBIR SI ES UNA TAUTOLOGÍA, UNA CONTRADICCIÓN O UNA PROPOSICIÓN CONTINGENTE.

Ejemplos

- $(p \wedge q) \wedge \sim p$

p	q	$(p \wedge q)$	$\sim p$	$(p \wedge q) \wedge \sim p$
V	V	V	F	**F**
V	F	F	F	**F**
F	V	F	V	**F**
F	F	F	V	**F**

Es una contradicción

1. $p \vee \sim p$

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$

____

2. $p \wedge \sim p$

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$

____

3. $p \leftrightarrow \sim q$

p	q	$\sim q$	$p \leftrightarrow \sim q$

4. $p \rightarrow (p \vee q)$

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow (p \vee q)$

5. $[(s \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \rightarrow (s \rightarrow p)$

s	q	p	$[(s$	$\rightarrow$	$q)$	$\wedge$	$(q$	$\rightarrow$	$p)]$	$\rightarrow$	$(s$	$\rightarrow$	$p)$
Paso													

3. Cuantificadores

1.3.1 CALIFICA LAS SIGUIENTES PROPOSICIONES CON SUS VALORES DE VERDAD.

A. Si el conjunto universo es U = {estados de México}

a = todos los estados tienen capital ( )
b = todos los estados tienen frontera con E. U. A. ( )
c = algunos estados tienen frontera con Guatemala ( )
d = ningún estado tiene costas ( )

B. U = {x | x es un número entero}

a = Todos los números son pares ( )
b = Ningún número es par ( )
c = Algunos números son pares ( )

1.3.2 ESCRIBE EL SÍMBOLO ADECUADO PARA LOS SIGUIENTES CASOS.

1. Una *función lógica*, o simplemente un enunciado formal ________
2. Cuantificador universal, se lee *para todo* ________
3. Barra vertical que se lee *tal que* o *tales que* ________
4. Se puede leer *está en* o *pertenece a* ________
5. Indica que *no está en* o *no pertenece a* ________
6. Cuantificador existencial, se lee *existe* o *para algún* o *para al menos un* ___

1.3.3 TRADUCE AL LENGUAJE SIMBÓLICO LAS SIGUIENTES PROPOSICIONES SIMPLES DONDE INTERVIENEN CUANTIFICADORES.

Ejemplos

- Todo hombre es inteligente $\underline{(\forall\ x \in M)\ (x \text{ es inteligente})}$
- Existe un número que no es igual a uno $\underline{(\exists\ x \in Z)(x \neq 1)}$
- Ninguno de los planetas son muy fríos $\underline{(\forall\ x \in P)\sim p(x)}$

Nota: Los paréntesis pueden sustituirse por comas, o bien escribir el enunciado en forma de conjunto utilizando la barra vertical.

1. Sea M el conjunto de los hombres. Escribir:

   a) No todo hombre es inteligente ________________
   b) Existe un hombre que no es inteligente ________________
   c) Todos los que no son hombres son inteligentes ________________
   d) Existe alguien que no es hombre y es inteligente ________________

2. Z es el conjunto de los números enteros. Escribir:

   a) Todos los números son mayores a 15 ________________
   b) Existe un número que es primo ________________
   c) Todos los números enteros son positivos ________________
   d) Ningún número es negativo ________________

3. Sea P el conjunto de los planetas, p(x): *x es muy frío*, q(x): *x es cercano al sol*, r(x): *x tiene satélites*, s(x): *x tiene órbita*. Escribir:

   a) Existe un planeta muy frío ________________
   b) Todos los planetas son cercanos al sol ________________
   c) Existen planetas sin satélites ________________
   d) No existen planetas que no tienen orbita ________________

1.3.4 DADO $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, HALLAR EL VALOR DE VERDAD DE LOS SIGUIENTES ENUNCIADOS.
MENCIONA PORQUÉ RAZÓN LE ASIGNAS EL VALOR DE VERDAD.

Ejemplos

► $(\exists\, x \in A)\ (x + 3 = 10)$ (F) no existe ningún número en A que sumado con tres tenga como resultado el numero 10.(5 + 3 = 8)

1) $(\forall\, x \in A)\ (x + 3 < 10)$ (   ) ______________________
2) $(\exists\, x \in A)\ (x + 3 < 5)$ (   ) ______________________
3) $(\forall\, x \in A)\ (x + 3 \leq 7)$ (   ) ______________________
4) $(\exists\, x \in A)\ (x = 5)$ (   ) ______________________
5) $(\forall\, x \in A)\ (x < 4)$ (   ) ______________________

1.3.5 SEA {0, 1, 2, 3, 4} EL CONJUNTO UNIVERSAL. DETERMINAR EL VALOR DE VERDAD DE CADA ENUNCIADO.

1) $\forall\, x,\ x + 4 < 6$ ( ) ________________________________

2) $\exists\, x,\ x + 4 < 6$ ( ) ________________________________

3) $\exists\, x,\ 2x^2 + x = 20$ ( ) ________________________________

4. Proposiciones Abiertas

Def. Una ***proposición abierta*** es aquella que contiene una *variable* que representa al sujeto (no definido). Una proposición abierta podrá ser calificada como verdadera o falsa cuando se defina el sujeto de ella, al sustituir la variable.

1.4.1 A PARTIR DE LAS SIGUIENTES PROPOSICIÓNES ABIERTAS CONSTRUYE DOS PROPOSICIONES LÓGICAS, UNA QUE SEA VERDADERA Y UNA QUE SEA FALSA.

Ejemplos

- x es un número mayor que 5

p = 13 es un número mayor que 5 (V)
q = 4 es un número mayor que 5 (F)

A. x es un órgano del aparato respiratorio
p = ____ (V)
q = ____ (F)

B. x fue presidente de Estados Unidos
p = ____ (V)
q = ____ (F)

C. x es un número par comprendido entre 15 y 21
p = ____ (V)
q = ____ (F)

D. x es un número primo menor que 20
p = ____ (V)
q = ____ (F)

5. Conjuntos

Def. Un ***conjunto*** es una colección bien definida de objetos (números, personas, figuras, ideas, ecuaciones, etc.) A estos objetos se les llama *elementos* o *miembros* del conjunto.
Para simbolizar un conjunto se usa una letra mayúscula. Se emplean llaves dentro de las cuales se describe el conjunto o se anotan sus elementos, representándolos con letras minúsculas y separados por comas.

1.5.1 ESCRIBIR EN CADA CASO LOS SÍMBOLOS $\in$ O $\notin$ SEGÚN CORRESPONDA ENTRE CADA ELEMENTO Y EL CONJUNTO QUE SE INDICA.

Ejemplos

- C = {x | x es letra de la palabra monte }

  $t \in C$; $e \in C$; $m \in C$; $r \notin C$; $w \notin C$

a) D = {2, 4, 6, 8, 10, 15}

12 _____ D; 6 _____ D ; 100 _____ D ; 4 _____ D

b) P = {paralelogramos}

Cuadrado ___ P ; trapecio ___ P ; rectángulo ___ P ; circulo___ P

c) B = { Meteorito, Sol, Luna, Tierra}

Estrella ___ B ; Sol ___ B ; tierra ___ B ; Planeta___ B

d) D = {x | x hace verdadera la ecuación x + 9 = 46}

20 _____ D; 37 _____ D ; 35 _____ D ; 8 _____ D

Def. Un conjunto puede definirse o determinarse de dos maneras:
Por extensión, es decir, enunciando o enumerando cada uno de sus elementos.
Por comprensión, esto es, enunciando o describiendo una propiedad o atributo que caracterice a todos los elementos del conjunto.

1.5.2 INDICAR CUÁLES CONJUNTOS ESTÁN DEFINIDOS POR COMPRENSIÓN, Y CUÁLES POR EXTENSIÓN.

1. C = {los miembros de la OMS} ________________________
2. F = {1/2, 1/3, ¼, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8} ________________________

3. D = {x | $x^2 - 3x - 5 = 0$} ________________________
4. V = {a, e, i, o, u} ________________________
5. E = {x | x es estudiante y x está aprobado} ________________________
6. J = {Las vocales del alfabeto} ________________________
7. D = { -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3} ________________________
8. N = {rojo, blanco, azul, rosa, verde, gris} ________________________

1.5.3 ESCRIBE LOS SIGUIENTES CONJUNTOS DADOS POR EXTENSIÓN.

Ejemplos

- El conjunto de los números naturales mayores que 10 pero menores que 17.
  A = { 11, 12, 13, 14, 15, 16} .

Nota: si el conjunto no tiene ningún elemento, se escribe A = ∅ o A = { } pero nunca A = {∅}

1. El conjunto de los enteros positivos mayores que 5 pero menor o igual a 9

   ____

2. A = {x | x es positivo, $x^2 = 4$}

   ____

3. C = {y | y es positivo, y es negativo}

   ____

4. D = {x | x es una letra de la palabra "corrector"}

   ____

5. S = {x | x es una vocal del alfabeto}

   ____

1.5.4 ESPECIFICA LOS SIGUIENTES CONJUNTOS EN UNA FORMA CONSTRUCTIVA (POR COMPRENSIÓN).

Ejemplos

- B = {1, 3, 5, 7, 9,...} B = {x | x es natural, x es impar}
- El conjunto A que consiste de las letras a, b, c, d, e y f.
  A ={x | x es una de las 6 primeras letras del alfabeto}

1. C = {2, 4, 6, 8, 10, ...} ______________________________________
2. D = {... –5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, . . .} ____________________________
3. V = {a, e, i, o , u} ______________________________________
4. A = {2, 4, 6, 8} ______________________________________
5. El conjunto B = {3} ______________________________________

1.5.5 ENCUENTRA EL CONJUNTO QUE CORRESPONDE A CADA PROPOSICIÓN ABIERTA Y EXPRÉSALO POR EXTENSIÓN Y POR COMPRENSIÓN.

Ejemplos

a = x es una vocal del alfabeto

A = {a, e, i, o, u}_

A = _{x | x es una vocal}_

f = x es una letra de la palabra papá

F = ____

F = ____

h= x es un número que satisface la ecuación 2x + 5 = 13

H= ____

H= ____

1.5.6 ESCRIBIR LAS SIGUIENTES AFIRMACIONES EN NOTACIÓN CONJUNTISTA.

1. x es elemento de A ________________________
2. B es subconjunto de C ________________________
3. V es subconjunto propio de W ________________________
4. T no es subconjunto de B ________________________
5. M es un conjunto vacío ________________________
6. R y Q son conjuntos iguales ________________________
7. R es superconjunto de Q ________________________
8. El conjunto potencia de W ________________________
9. y no pertenece a A ________________________
10. El conjunto vacío ________________________

Def. Llamamos a un conjunto ***unitario***, si consta de un solo elemento; y ***vacío***, si carece de elementos. El conjunto que contiene la totalidad de los elementos que intervienen en una situación particular, recibe el nombre de ***conjunto universo*** (o universal).
La ***cardinalidad*** de un conjunto es el número de elementos que contiene.

1.5.7 ESCRIBIR A LA DERECHA DE CADA CONJUNTO SI ES UNITARIO, VACÍO O DE VARIOS ELEMENTOS.

a) D ={t} ______________
b) A = {números impares divisibles entre 2} ______________
c) M = {cuadrado} ______________
d) G = {y | y + 3 = y – 3} ______________

1.5.8 INDICA SI LOS CONJUNTOS DESCRITOS A CONTINUACIÓN SON FINITOS O INFINITOS.

1. Los meses del año ______________
2. {x | x es un número par} ______________
3. El conjunto de los múltiplos de 6 ______________
4. {1, 2, 3, . . . , 199, 200} ______________

1.5.9 DETERMINA LA CARDINALIDAD DE LOS SIGUIENTES CONJUNTOS.

1. M = {*m* | *m* es un mes del año} ______________
2. B = {*y* | *y* es un número entero positivo menor que 14} ______________
3. W = {x | 3x = 3} ______________
4. N = {x | x es un número real y $x^2 = -5$} ______________
5. K = {11, 12, 13, . . . ,98, 99} ______________

1.5.10 DADOS LOS CONJUNTOS:
M = {2, 4, 6, 8, 10}
N = {a, e, i, o, u}
P = {x | x es un número natural menor que 12}
Q = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

DETERMINA CUÁLES DE LAS SIGUIENTES AFIRMACIONES SON VERDADERAS:

1. $7.6 \in P$ ______________
2. $M \subset N$ ______________
3. M y P son comparables ______________
4. $P \not\subset M$ ______________
5. $Q = P$ ______________

Def. Si todos los elementos del conjunto A son también elementos del conjunto B, se dice que A es ***subconjunto*** de B.
La familia de todos los subconjuntos de un conjunto W se llama ***conjunto potencia*** de W.

1.5.11 ESCRIBE TODOS LOS SUBCONJUNTOS QUE SE PUEDEN FORMAR CON LOS ELEMENTOS DE LOS SIGUIENTES CONJUNTOS.

1. A = {2, a}

   ____

   ____

2. B = {x}

   ____

3. D = {2x, 3y, 4z}

   ____

   ____

Operaciones con conjuntos.

Def. La ***unión*** de los conjuntos A y B es un conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A o a B o a ambos. Se denota por $A \cup B$.
La ***intersección*** de los conjuntos A y B es un conjunto formado por los elementos que son comunes a A y a B, es decir los elementos que pertenecen a A y también a B. Se denota por $A \cap B$.
La ***diferencia*** de los conjuntos A y B es el conjunto de elementos que pertenecen a A, pero no pertenecen a B. Se denota por A – B.
El ***complemento*** de un conjunto A es el conjunto de todos los elementos que no pertenecen a A (incluyendo el conjunto universo), es decir, la diferencia del conjunto universal U y del A (U – A). Se denota por A'.

Ejemplos

Sean A = {1, 2, 3, 4, 5}, B = {4, 5, 6, 7, 8, 9}, $U = \{x \mid 1 \leq x \leq 10\}$

$A \cup B =$ {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
$A \cap B =$ {4, 5}
A – B = {1, 2, 3}
A' = {6, 7, 8, 9, 10}
$(A \cup B)'$ = {10}
$B \cup B =$ {4, 5, 6, 7, 8, 9}

1.5.12 DADO EL CONJUNTO UNIVERSO $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ Y LOS CONJUNTOS:

$A = \{1, 4, 7, 9, 10\}$
$B = \{2, 4, 6\}$
$C = \{4, 5, 6, 7\}$
$D = \{x \mid x \in U \text{ y } x \text{ es par}\}$
$E = \{x \mid x \in U \text{ y } x \text{ es impar}\}$

1. $A \cup B =$ ____________________
2. $D \cap E =$ ____________________
3. $E' =$ ____________________
4. $(B \cup C)' =$ ____________________
5. $(A \cap D)' =$ ____________________
6. $A - D =$ ____________________
7. $A \cup (B \cap C) =$ ____________________

1.5.13 SEA EL CONJUNTO UNIVERSAL $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y sean $P = \{a, b, c, d, e\}$, $Q = \{a, c, e, g\}$ y $R = \{b, e, f, g\}$. HALLAR:

1. $P \cup R =$ ____________________
2. $Q \cap P =$ ____________________
3. $R - Q =$ ____________________
4. $Q' =$ ____________________
5. $P' - Q =$ ____________________
6. $Q' \cup R =$ ____________________
7. $(P - R)' =$ ____________________
8. $R' \cap P =$ ____________________
9. $(P - Q')' =$ ____________________
10. $(P \cap P')' =$ ____________________

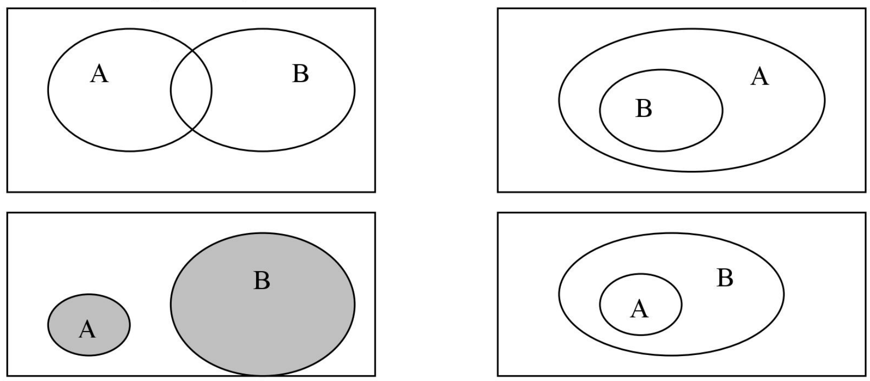
Def. Las relaciones entre conjuntos pueden ilustrarse fácilmente representando los conjuntos por medio de superficies limitadas por líneas curvas cerradas, llamadas ***diagramas de Venn-Euler*** o simplemente de Venn.

1.5.14 EN LOS DIAGRAMAS DE VENN QUE SIGUEN, SOMBREAR:

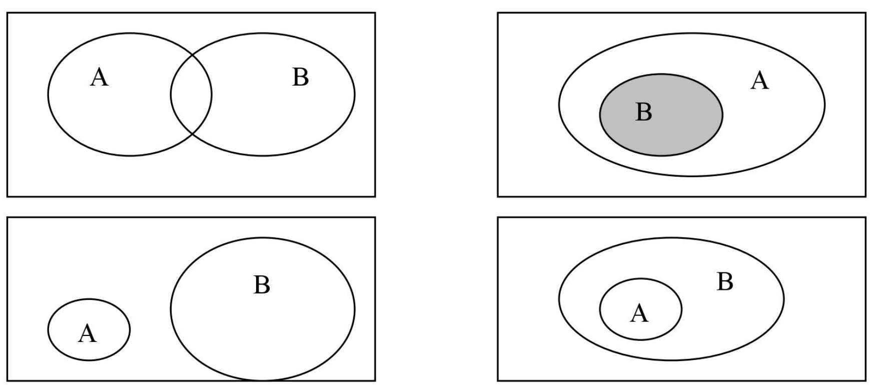
Ejemplos

Se han sombreado algunos diagramas a manera de ejemplo

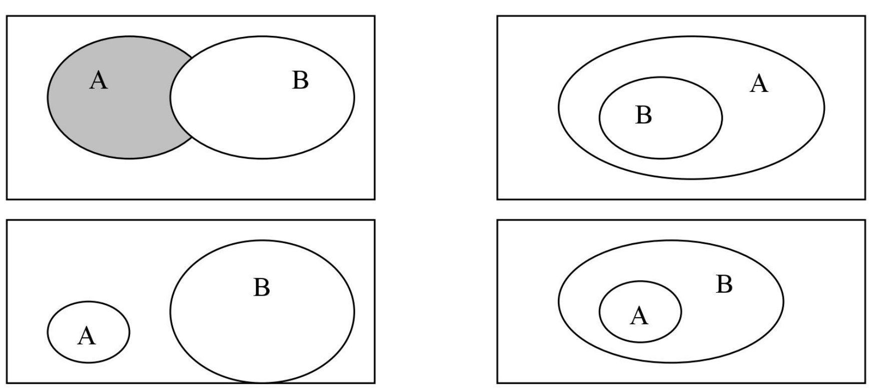
1. A unión B ($A \cup B$)



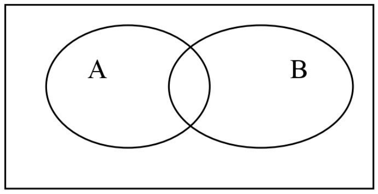
2. intersección de A y B ($A \cap B$)



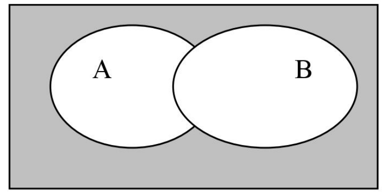
3. A menos B ($A - B$)



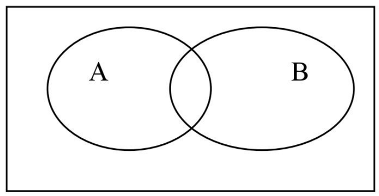
4. (a) B'



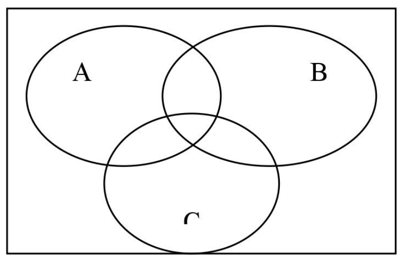
(b) $(A \cup B)'$



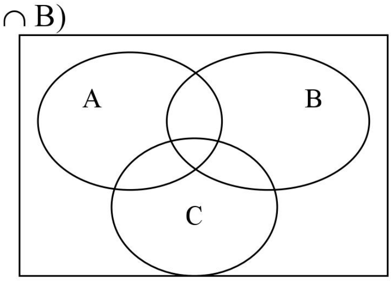
5. $(B - A)'$



6. $(B \cup C) \cap A$



7. $(A \cap C) \cup (A \cap B)$



1.5.15 HACER UN DIAGRAMA DE VENN CON TRES CONJUNTOS NO VACÍOS V, W Y Z DE MODO QUE V, W Y Z TENGAN LAS SIGUIENTES CARACTERÍSTICAS.

1) $V \subset W$, $Z \subset W$, $V \cap Z = \varnothing$

2) $V \subset W$, $\quad Z \not\subset W$, $\quad V \cap Z \neq \varnothing$

1.5.16 RESPONDE LAS SIGUIENTES CUESTIONES.

1. Si $A = \{x \mid 2x = 8\}$ y $b = 4$, ¿Es $b = A$?

   ____

2. Si $A = \{r, s, t\}$. Es decir, A consta de los elementos r, s y t. Dígase cuáles de las afirmaciones son correctas o incorrectas. Si alguna es incorrecta, decir porqué
   - a) $r \in M$ ______________________________
   - b) $r \subset M$ ______________________________
   - c) $\{r\} \in M$ ______________________________
   - d) $\{r\} \subset M$ ______________________________
3. Si $D = \{a, b\}$, decir entre las afirmaciones siguientes cuáles son correctas o incorrectas.
   - a) $\{b\} \in D$ ______________________________
   - b) $\{b\} \subset D$ ______________________________
   - c) $\varnothing \in D$ ______________________________
   - d) $b \subset D$ ______________________________
4. ¿Cuáles de estos conjuntos son iguales: $\{k, l, h\}$, $\{k, l, k, h\}$, $\{l, k, l, h\}$, $\{h, k, h, l\}$? ______________________________
5. ¿Cuáles de estos conjuntos son iguales?
   - a) {x | x es una letra en la palabra “armar”}
   - b) Las letras de la palabra “mara”
   - c) {x | x es una letra de la palabra “rama”}
   - d) las letras a, m, r

   ____

1.5.17 DADOS CUALQUIER CONJUNTO A Y U (UNIVERSO), DETERMINAR:

1) $U \cap A$ _____________
2) $A \cup A$ _____________
3) $\varnothing'$ _____________
4) $\varnothing \cup A$ _____________
5) $A' \cap A$ _____________
6) U' _____________
7) $U \cup A$ _____________
8) $A' \cup A$ _____________
9) $A \cap A$ _____________
10) $\varnothing \cap A$ _____________

Unidad Temática 2

Sistemas Numéricos

1. Números naturales

Def. Si tenemos dos conjuntos A y B, se puede establecer una correspondencia ***biunívoca*** cuando es posible asociar todos los elementos de A con todos los elementos de B, de forma que a cada elemento de A le corresponda un y solo un elemento del conjunto B.

2.1.1 ENTRE CADA PAR DE LETRAS, ESCRIBIR LOS SIGNOS ⇔, = O ≠ SEGÚN CORRESPONDA EN CADA CASO.

a) A = {rojo, verde, amarillo, azul}
B = {rojo, verde, azul} A __________ B

b) P = {2, 4, 6, 8, 10, 12}
I = {3, 5, 7, 9, 11, 13} P ___________ I

c) S = {a, b, c, d, e, f, g}
T = {z, m, y, t, x, w, k} S __________ T

d) K = {1/2, 1/3, ¼, 1/6}
D = {1/6, 1/4, ½, 1/3} K __________ D

Def. Si se establece una correspondencia *biunívoca,* es decir uno a uno, entre dos conjuntos, se dice que estos conjuntos son ***coordinables***, o que tienen la misma cardinalidad.

2.1.2 ESCRIBE LA CARDINALIDAD DE LOS CONJUNTOS DEL EJERCICIO ANTERIOR. MENCIONA SI SON COORDINABLES.

a) n(A) = ______________ c) n(S) = ______________
n(B) = ______________ n(T) = ______________

b) n(P) = ______________ d) n(K) = ______________
n(I) = ______________ n(D) = ______________

Def. Si ordenamos de menor a mayor el conjunto de todos los números cardinales, obtenemos un *conjunto ordenado*, al que llamamos conjunto de ***números naturales*** y lo representamos por la letra $\mathbb{N}$.

Algunas características de los números naturales son:

- ✓ Tiene un primer elemento: el uno.
- ✓ Es un conjunto infinito.
- ✓ Cada número natural tiene un sucesor.
- ✓ Entre un número natural y su sucesor no hay otro número natural.
- ✓ Si un número está en $\mathbb{N}$, entonces su sucesor también está en $\mathbb{N}$.

Algunos autores consideran el cero como número natural. Es decir, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\}$

2.1.3 RESPONDE LAS SIGUIENTES PREGUNTAS.

Procedimiento

Al responder, toma en cuenta las nociones de conjuntos coordinables.

1. ¿Qué nos indica un número ordinal?

   ____

   ____

2. ¿Qué indica un número cardinal?

   ____

   ____

3. Si un conjunto de platos y otro de vasos son coordinables con el conjunto {0, 1, 2, 3, 4}, ¿cuál es el número cardinal de estos conjuntos?

   ____

   ____

4. ¿Qué significa que el número x es igual a y?

   ____

   ____

5. Explique cuándo cierto número de personas es menor que cierto número de revistas.

   ____

   ____

6. Explique por qué el número de profesores de una escuela es mayor que el número de salones.

   ____

   ____

Def. Si a, b $\in \mathbb{N}$, entonces se cumple una y solo una de las siguientes relaciones:

- ✓ Que el primero sea mayor que el segundo $a > b$.
- ✓ Que el primero sea menor que el segundo $a < b$.
- ✓ Que el primero sea igual al segundo $a = b$.

A esta propiedad se le denomina ***tricotomía***.

Si a, b y c son tres números naturales tales que $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$. Ésta última es la propiedad ***transitiva*** de la desigualdad.

2.1.4 ESCRIBIR SOBRE LA LINEA LA RELACIÓN DE IGUALDAD (=) O DESIGUALDAD (> O <) ADECUADA.

1) 65 _______ $6 + 5$

2) $x + y$ _______ $y + x$

3) 8 _______ 12

4) $4 \text{ x } 10$ _______ 70

5) $3 \text{ x } 12$ _______ $3 + 12$

6) x _______ $x + y$, $x, y \in \mathrm{N}$

7) x _______ y , $x = y + 1$, $x, y \in \mathrm{N}$

8) $4y$ _______ $4y$

9) w _______ t , $z < t$ y $w < z$

10) m _______ p , $p < x$ y $x < m$

Def. Existen diferentes clasificaciones para los números naturales:

Los números ***pares*** son aquellos que son divisibles entre dos.
Aquellos que no pueden dividirse exactamente entre dos se denominan ***impares***.

Los números ***primos*** son todos aquellos números naturales mayores que uno, que solamente son divisibles entre ellos mismos y la unidad. Es decir, el conjunto de sus divisores consta de dos elementos.
Los números que tienen más de dos divisores, se denominan ***compuestos*** y se pueden expresar como el producto de números primos.
En general, todo número natural, diferente de 0 y 1, se puede expresar como el producto de factores primos en forma única.

2.1.5 CONSTRUYE LA CRIBA DE ERATÓSTENES PARA DETERMINAR EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS PRIMOS DESDE EL 1 AL 100.

Procedimiento

- ✓ Como 1 no es primo, lo "tachamos" de la lista.
- ✓ Luego encerramos el 2, (que es el primer primo que encontramos).
- ✓ Eliminamos todos los múltiplos de 2.
- ✓ Después del 2 encontramos sin tachar el número 3, que es el siguiente primo.
- ✓ Eliminamos todos los múltiplos de 3.
- ✓ Encerramos el siguiente número que encontramos sin tachar y eliminamos sus múltiplos.
- ✓ Repetimos el procedimiento hasta encontrar un número primo cuyos múltiplos no se encuentren en la lista. (sea mayor a 100).
- ✓ Todos los números que quedaron sin tachar son los números primos que hay entre 1 y 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2.1.6 CLASIFICA LOS SIGUIENTES NÚMEROS NATURALES EN: PAR, IMPAR, PRIMOS, Y COMPUESTOS. $a, b, x, y \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Ejemplos

- ► 5 Primo, impar.
- ► 4y Par, compuesto.

A) 13 ____________________

B) 2x ____________________

C) 2y + 1 ____________________

D) 2b – 1 ____________________

E) 86 ____________________

F) 2a + 2b ____________________

G) 2x + 3 ____________________

H) 5y ____________________

I) 10a + 1 ____________________

J) 229 ____________________

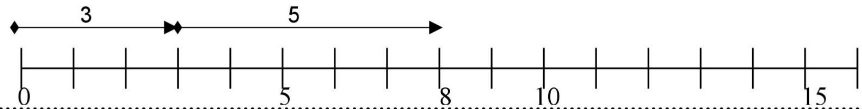
Def. La ***adición*** es la operación en la que, dados los cardinales de dos conjuntos ajenos A y B, asigna el cardinal de la unión de ambos conjuntos.
Es decir, si a y b son dos números naturales, entonces la suma de a y b es el número de elementos de $A \cup B$, en donde A y B son conjuntos ajenos, con a y b elementos respectivamente.

2.1.7 IDENTIFICA LOS SUMANDOS Y ENCUENTRA LA SUMA O TOTAL. REPRESENTA LA ADICIÓN EN LA RECTA NUMÉRICA.

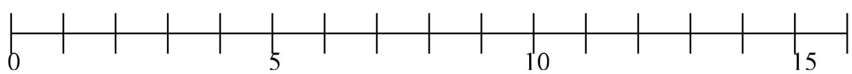
Ejemplos

Sumandos suma

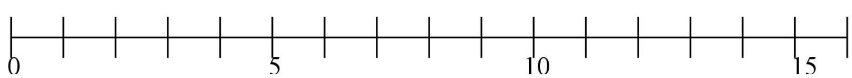
▶ $\underbrace{3 + 5}_{\text{Sumandos}} = \underbrace{8}_{\text{suma}}$



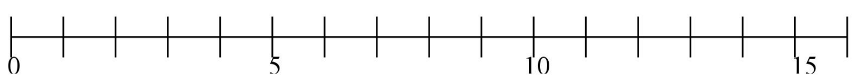
A) 4 + 7 =



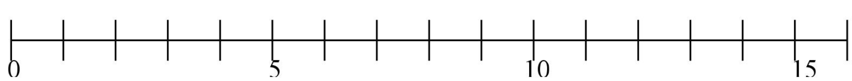
B) 8 + 4 =



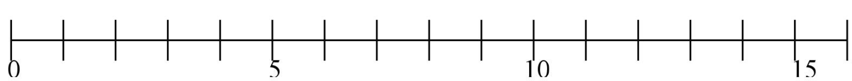
C) 4 + 3 + 2 =



D) 3 + 2 + 4 =



E) 5 + 0 + 9 =



Def. PROPIEDADES DE LA ADICIÓN:

Cerradura. La suma de dos números naturales es otro natural.

Propiedad ***Conmutativa***. En todas las adiciones, los sumandos pueden intercambiarse y el total sigue siendo el mismo. $a + b = b + a$

Propiedad ***Asociativa***. En adiciones con tres o más sumandos, el número de sumandos puede reducirse sin alterar el total. $(a + b) + c = a + (b + c)$

Ley de ***Cancelación***. Si en ambos miembros de una igualdad aparece un mismo sumando, este puede ser cancelado. $a + c = b + c \Rightarrow a = b$

Elemento Neutro. Cuando en una adición uno de los sumandos es cero, entonces el total es igual al sumando diferente de cero. $0 + a = a + 0 = a$

2.1.8 EN CADA UNO DE LOS SIGUIENTES CASOS, SE HA APLICADO ALGUNA DE LAS PROPIEDADES DE LA ADICIÓN. ESCRIBIR, SOBRE LA RAYA, EL NOMBRE DE LA PROPIEDAD CORRESPONDIENTE. $(a, n \in N)$

Ejemplos

- ► $(9 + 8) + 3 = 9 + (8 + 3)$ Asociativa
- ► $(13 + n) + 5 = 5 + (13 + n)$ Conmutativa

A. $194 + 0 = 194$ ____________________

B. $13 + 25 + 18 = 25 + 18 + 13$ ____________________

C. $157 + (a + n) = (157 + a) + n$ ____________________

D. $12 + a = a + 12$ ____________________

E. $2 + 4 \ + 3 = 6 + 3$ ____________________

F. $n + a = a + n$ ____________________

G. $a + n = 0 + a + n$ ____________________

2.1.9 UTILIZAR LAS PROPIEDADES ASOCIATIVAS Y CONMUTATIVAS PARA ESCRIBIR DOS EXPRESIONES EQUIVALENTES

A. $(a + b) + 8$ ____________________ ____________________

B. $y + (15 + x)$ ____________________ ____________________

C. $5 + (3 + 3y) + 4$ ____________________ ____________________

Def. Si a y b son números naturales, entonces la multiplicación a x b consiste en sumar b + b + ... + b, tantas veces como lo indique el número a.

$$a \times b = \underbrace{b + b + \ldots + b}_{\text{a sumandos}}$$

2.1.10 COMPLETAR LAS SIGUIENTES IGUALDADES, ESCRIBIENDO COMO SEGUNDO MIEMBRO, LA MULTIPLICACIÓN QUE EQUIVALE A LA ADICIÓN PROPUESTA, O LA ADICIÓN DE SUMANDOS IGUALES QUE EQUIVALE A LA MULTIPLICACIÓN PROPUESTA.

Ejemplos

- 1000 + 1000 + 1000 = 3 X 1000
- 2 X 76 = 76 + 76

a) 218 + 218 = ______________________

b) m + m + m + m + m + m = ______________________

c) a = ______________________

d) 1 + 1 + 1 + 1 = ______________________

e) 1 x 4 = ________________________________

f) 5 x 0 = ________________________________

g) 6 x a = ________________________________

h) 1 x m = ________________________________

Def. PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN:

Cerradura. La multiplicación de números naturales da como resultado otro número natural.

Ley de ***Cancelación***. Si en ambos miembros de una igualdad aparece el mismo factor, a excepción del cero, puede cancelarse, y de esta manera, obtener otra igualdad. $a \bullet c = b \bullet c \Rightarrow a = b;\ c \neq 0.$

Elemento Neutro. Cualquier número natural, al ser multiplicado por 1, da como producto el mismo número natural. $1 \bullet a = a \bullet 1 = a.$

NOTA: Para evitar confusión, se escribe $a \bullet b$ o simplemente ab en vez de a x b.

Def.

Propiedad ***Conmutativa***. En toda multiplicación, el orden de los factores puede intercambiarse y el producto sigue siendo el mismo. $a \bullet b = b \bullet a$

Propiedad ***Asociativa***. Los factores que intervienen en una multiplicación se pueden asociar en la forma que mejor convenga, sin que el producto se altere.

$$(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$$

Propiedad ***distributiva***. Si deseamos multiplicar la suma de dos números por otro factor, podemos multiplicar cada uno de ellos por separado y sumar luego los productos obtenidos. $a(b + c) = (a \bullet b) + (a \bullet c)$

2.1.11 USAR LAS PROPIEDADES CONMUTATIVA, ASOCIATIVA Y DISTRIBUTIVA PARA ESCRIBIR DOS EXPRESIONES EQUIVALENTES A CADA EXPRESIÓN.

1. $(m \bullet n) \bullet 3$ ________________ ________________
2. $5 \bullet (a + b)$ ________________ ________________
3. $7 \bullet (x \bullet y)$ ________________ ________________
4. $(p + q) \bullet 4$ ________________ ________________
5. $(6m)(nx)$ ________________ ________________

2.1.12 RESPONDE LAS SIGUIENTES PREGUNTAS.

1. ¿Cuál es el elemento neutro en la multiplicación? ________________
2. Siendo el multiplicando 35, ¿Cuál debe ser el multiplicador para que el
   producto sea 35? ________________________
   el doble de 35? ________________________
   su tercera parte? ________________________
   5 veces mayor que 35? ________________________
   cero? ________________________
3. Si $xy = 3x$, ¿Qué número es y? ________________
4. Si $xy = x$, ¿Qué número es y? ________________
5. Si $m \bullet 5 = n$, ¿Qué valor tiene n con relación m? ____________
6. Si $5x = 20$, ¿Qué número es x? ¿porqué? ________________

2.1.13 EMPLEAR LA PROPIEDAD DISTRIBUTIVA PARA ESCRIBIR EXPRESIONES EQUIVALENTES.

1. $4(2x + 5)$ ________________________
2. $(5x + 5 + 3p)4$ ________________________
3. $(x - y)z$ ________________________

4. $(g + m - x)n$ ____________________
5. $9(15 + 8 + 4)$ ____________________
6. $(a - b + c - e)x$ ____________________
7. $rs(3 + 4)$ ____________________
8. $xy(mn + pr)$ ____________________

Def. La ***potenciación*** es la operación que nos permite abreviar la escritura de una multiplicación de factores iguales. Si el factor se repite n veces, tenemos:

$$\underbrace{a^n = a \bullet a \bullet \ldots \bullet a}_{\text{n veces}} = b$$

Los elementos de una potenciación son: base, exponente y potencia.

En general, dados a, b, n $\in$ **N**, tenemos:

- El exponente n que indica el número de veces que multiplicamos los factores.
- La base a que indica cuáles son los factores iguales.

Llamaremos potencia al producto b obtenido en dicha multiplicación.

2.1.14 EXPRESAR CADA UNA DE LAS POTENCIAS SIGUIENTES EN FORMA DE PRODUCTO. CALCULAR EL RESULTADO.

A. 12^3 ____________________
B. n^5 ____________________
C. $(2y)^4$ ____________________
D. $2y^4$ ____________________
E. $(4n)^3$ ____________________

2.1.15 EXPRESAR EN FORMA DE POTENCIA, LOS PRODUCTOS INDICADOS SIGUIENTES.

A. $4 \times 4 \times 4 \times 4 =$ ______________
B. $n \bullet n \bullet n \bullet n \bullet n \bullet n =$ ______________
C. $ax \bullet ax \bullet ax \bullet ax =$ ______________
D. $a(x \bullet x \bullet x \bullet x) =$ ______________
E. $3x(y \bullet y \bullet y \bullet y \bullet y \bullet y) =$ ______________
F. $3(x \bullet x \bullet x \bullet x \bullet x \bullet x)y =$ ______________
G. $(3 \bullet 3 \bullet 3 \bullet 3 \bullet 3)mn =$ ______________
H. $15y(n \bullet n \bullet n \bullet n) =$ ______________

Def. En la potenciación se adoptan los siguientes convenios:

- ✓ Cualquier número elevado a la potencia 0, es igual a 1: $x^0 = 1$.
- ✓ Cuando a un número no se le escribe el exponente, consideramos que éste es 1. $x = x^1$.
- ✓ El exponente suele escribirse con caracteres pequeños, y se coloca siempre en la parte superior derecha de la base.

2.1.16 HALLAR EL VALOR DE LAS SIGUIENTES POTENCIAS. (APLICA LA LEY DE LOS EXPONENTES PARA LA SUMA, MULTIPLICACIÓN, DIVISIÓN Y POTENCIA DE UNA POTENCIA).

Procedimiento

- ✓ Para multiplicar potencias de la misma base, hay que sumar los exponentes de los factores para obtener el exponente del producto, la base sigue siendo la misma. $a^x \bullet a^y = a^{x+y}$
- ✓ Para dividir potencias de la misma base, hay que restar los exponentes del dividendo y divisor para tener el exponente del cociente; la base sigue siendo la misma. $a^x / a^y = a^{x-y}$
- ✓ La multiplicación de potencias que tienen distinta base y el mismo exponente es de la forma $a^x \bullet b^x = (ab)^x$
- ✓ Para sumar potencias con la misma base y mismo exponente, se suman los coeficientes de cada uno de ellos. $am^y + bm^y = (a + b)\, m^y$
- ✓ Para elevar un exponente dado a otra potencia, se multiplica el exponente de la base por el exponente al que se desee elevar. $(a^x)^y = a^{xy}$

Ejemplos

- ► $2x^2 + y^3 + 3x^2 + 2y^3 = \underline{2x^2 + 3x^2 + y^3 + 2y^3 = (2 + 3)x^2 + (1 + 2)y^3 = 5x^2 + 3y^3}$
- ► $(m^2 \bullet m^3 \bullet m^4) \div (m^2)^3 = \underline{m^{2+3+4} \div m^{(2)(3)} = m^9 \div m^6 = m^{9-6} = m^3}$

1) $520^1 =$ ______________________________

2) $8^0 \bullet 5^4 =$ ______________________________

3) $3^2 \bullet 4^2 =$ ______________________________

4) $x^2 + x^2 + x^2 + x^2 =$ ______________________________

5) $31m + 2m =$ ______________________________

6) $23a^y - 10a^y + a^y =$ ______________________________

7) $23x^0 + 12\, x^0 =$ ______________________________

8) $5^m \bullet 5^n =$ ______________________________

9) $a \bullet a^4 \bullet a^6 =$ ______________________________

10) $5a \bullet a^x \bullet 4a^2 =$ ______________________________

11) $a^4 \div a^2 =$ ______________________________

12) $a^{xy} \div a^{xy} =$ ______________________________

13) $a^{14} \div (a^3 \bullet a \bullet a^4) =$ ______________________________

14) $(3^4 \bullet 3^6 \bullet 3^{15}) \div (3^8 \bullet 3^{14}) =$ ______________________________

15) $(3^x)^2 =$ ______________________________

16) $(x^2y^3)^m =$ ______________________________

17) $(5x^7 + 3x^7)^y =$ ______________________________

18) $((54xy^5 \bullet 2x^3y^8)^{2x} + (23xy)^{3y})^0 =$ ______________________________

19) $(n^x)^y =$ ______________________________

20) $(y^2\ y^6)^x =$ ______________________________

21) $(345^0)^8 =$ ______________________________

22) $(45^3)^{2m} =$ ______________________________

2. Números enteros

Def. El conjunto de los ***números enteros*** está formado por los números naturales, los enteros negativos y el cero.

Los números naturales son considerados como *enteros positivos*. El cero es un número entero, pero no es positivo ni negativo. A cada número entero positivo, le corresponde un entero negativo opuesto a él, a los números de cada pareja así formada, se les considera ***simétricos*** uno del otro. (m y –m son simétricos)

Generalmente, denotamos al conjunto de los números enteros con la letra $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

$$\text{Enteros}\begin{cases}\text{Enteros positivos}\\ \text{Cero}\\ \text{Enteros negativos}\end{cases} \longleftarrow \boxed{\text{Tres conjuntos ajenos}}$$

2.2.1 NOMBRAR EL NÚMERO ENTERO QUE SE SUGIERE EN CADA SITUACIÓN Y ESCRIBE SU SIMÉTRICO.

Procedimiento

Convencionalmente se consideran como positivas las distancias contadas hacia la derecha, las alturas, ingresos, temperaturas sobre cero, etc. Los casos contrarios se consideran negativos.

A los números positivos se les antepone el signo + ; y a los negativos el signo -.

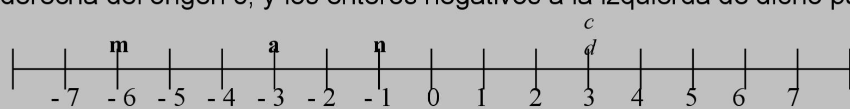
Cualquier número que no lleve signo antepuesto se considera positivo.

Ejemplos

		SIM.
▶ El martes, la tienda produjo una utilidad de $18	18	- 18
▶ El encendido es 3 minutos antes del arranque	- 3	3

		SIM.
a) La temperatura ayer fue 3° C bajo cero.	_______	_______
b) Carlos debe $12.	_______	_______
c) El jugador ganó 8 dólares .	_______	_______
d) En un juego Miguel perdió 12 canicas.	_______	_______
e) La temperatura en promedio fue de 18° sobre cero.	_______	_______
f) La fábrica tuvo utilidades por $2500.	_______	_______
g) El primo de Juan perdió $1286 el domingo.	_______	_______
h) El jueves, Jenny retiró $125 de su cuenta de ahorro.	_______	_______

Def. Los números enteros pueden representarse gráficamente en una recta en la que se indica un punto cero como *origen* y una unidad de medida.
Esta recta se divide hacia la derecha e izquierda en partes iguales, cada una de estas partes representa el segmento unidad. Los enteros positivos son situados a la derecha del origen 0, y los enteros negativos a la izquierda de dicho punto.



$m < a$; $n > a$; $c = d$

Si ubicamos un número *a* en la recta numérica, todos los números ubicados a la derecha de *a*, son mayores que él, de igual forma, todos los situados a la izquierda de *a*, son menores a él. Si dos números *c* y *d* están ubicados en el mismo punto, entonces son iguales.

2.2.2 ESCRIBIR AFIRMACIONES VERDADERAS USANDO > O <.

1. 5 _______ 9
2. – 7_______ 5
3. 6 _______ – 14
4. – 18______ – 6
5. 4 _______ 0
6. – 7_______ 7
7. 0 _______ – 8
8. – 10______ – 15

2.2.3 ESCRIBIR LOS SIGUIENTES ENTEROS EN ORDEN DE MENOR A MAYOR.

A. – 24, – 26, –18, – 34, – 5, – 16 ______________________________

B. 15, – 26, – 5, – 16, 12, – 13, – 14 ______________________________

C. 23, 34, 4, – 12, – 23, – 32, 0 ______________________________

D. 5, 6, 4, – 15, – 50, 32 ______________________________

Def. Se le llama *módulo* o ***valor absoluto*** de un número entero al valor que tiene prescindiendo del signo.

- Si el número es cero o positivo, entonces su valor absoluto es el mismo número.
- Si el número es negativo, entonces el valor absoluto es su simétrico.

2.2.4 ENCONTRAR EL VALOR ABSOLUTO.

1. $\lvert -12 \rvert$	______________	4. $\lvert 21 \rvert$	______________
2. $\lvert 7 \rvert$	______________	5. $\lvert -8 \rvert$	______________
3. $\lvert 0 \rvert$	______________	6. $\lvert -325 \rvert$	______________

2.2.5 EVALUAR.

A) $\lvert -4 \rvert + \lvert -7 \rvert$ __________________

B) $\lvert 16 \rvert + \lvert -16 \rvert$ __________________

C) $\lvert -12 \rvert \cdot \lvert 3 \rvert$ __________________

2.2.6 USAR $<$, $>$ O = PARA ESCRIBIR UNA AFIRMACIÓN VERDADERA.

A) $\lvert -3 \rvert$ _________ 6

B) $\lvert -5 \rvert$ _________ $\lvert -3 \rvert$

C) 2 _________ $\lvert -5 \rvert$

D) $\lvert 4 \rvert$ _________ $\lvert -8 \rvert$

E) $\lvert -13 \rvert$ _________ 13

Def. Las propiedades de la adición de números naturales se cumplen también en el conjunto de los números enteros. Encontramos también la siguiente propiedad:

Elemento Inverso Aditivo. Para cada número entero positivo *a* existe otro número entero negativo único – *a*, tal que $(+a) + (-a) = 0$.
Decimos que –*a* es el inverso aditivo de *a*, y viceversa, que *a* es el inverso aditivo de –*a*.

Como ya vimos, *a* y –*a* reciben el nombre de simétricos u opuestos.

2.2.7 ENCONTRAR EL INVERSO ADITIVO.

1. – 19 __________
2. 54 __________
3. 0 __________
4. – 7 __________
5. – 8 __________
6. 24 __________
7. – 26 __________
8. 9 __________

2.2.8 EXTIENDE LOS CONCEPTOS DE LAS PROPIEDADES DE LA ADICIÓN DE LOS NÚMEROS NATURALES PARA LOS NÚMEROS ENTEROS.

Propiedad de cerradura.

Propiedad conmutativa.

Propiedad Asociativa.

***Elemento Neutro*.**

Propiedad Cancelativa.

Def. Al realizar una adición de números enteros, consideramos las siguientes reglas:

a. Para sumar enteros positivos, se suman sus valores absolutos, y al resultado se le pone el signo *positivo*.

b. Para sumar enteros negativos, se suman sus valores absolutos, y al resultado se le pone el signo *negativo*.

c. Para sumar dos números enteros de distinto signo, se restan sus valores absolutos, y a la diferencia se le pone el signo del mayor en valor absoluto.

d. Para sumar varios enteros, se suman separadamente los positivos y los negativos, se restan los valores absolutos de ambas sumas, y a la diferencia se le pone el signo de la mayor en valor absoluto.

e. Cuando los sumandos son simétricos, la suma es cero.

2.2.9 REALIZA LAS SIGUIENTES OPERACIONES DE ADICIÓN DE NÚMEROS ENTEROS.

Ejemplos

- 5 + (-72) = - 67
- 28 + (– 44) + 17 + 31 + (– 94) = 76 + (- 138) = - 62

1. – 7 + 0 = ____________________
2. 0 + (–35) = ____________________
3. – 17 + (– 25) = ____________________
4. 14 + (– 36) = ____________________
5. 17 + (– 17) = ____________________
6. – 16 + 9 = ____________________
7. 75 + (– 14) + (– 17) + (– 5) = ____________________
8. 62 + 35 + 41 + (– 8) + (– 48) + (–102) = ____________________

   ____
9. 98 + (– 54) + 113 + (–998) + 44 + (– 612) + (– 18) + 334 = ________

   ____
10. – 445 + (– 123) + 1026 + (–919) + 213 + 111 + (– 874) = ____________

   ____

Def. Definimos la ***resta*** de dos números enteros cualesquiera como la suma del minuendo más el simétrico del sustraendo.

2.2.10 REALIZA LAS SIGUIENTES OPERACIONES DE SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS ENTEROS.

Ejemplos

SIMÉTRICO DE – 5

► - 8 – (- 5) = <u>- 8 + 5 = -3</u>

SIMÉTRICO DE 24

► 8 – 24 = <u>8 + (- 24) = - 16</u>

A. 5 – 8 = ____________________

B. – 106 – (– 420) = ____________________

C. 4 – (–4) = ____________________

D. – 5 – 16 = ____________________

E. 8 – (–4) – 2 – (–4) + 2 = ____________________

F. – 5 – (–2x) + x – (–6) = ____________________

G. 3x – (–7y) + 6x – (–5y) = ____________________

H. 8 – (–3x) + 2x – (–13) = ____________________

I. 9 – 9 = ____________________

J. 18 – (–15) – 3 – (–5) + 2 = ____________________

Def. En la adición de números enteros, podemos eliminar los paréntesis, escribiendo unos sumandos a continuación de otros, enlazados por sus respectivos signos.

- Todo paréntesis, precedido del signo *más*, puede suprimirse, sin alterar los signos de los términos que están dentro del paréntesis.
- Todo paréntesis precedido del signo *menos*, puede suprimirse, cambiando los signos de todos los términos que encierra.

2.2.11 REALIZA LAS SIGUIENTES OPERACIONES.

Ejemplos

► 25 - [(7 – 2) + (4 – 1) + (3 – 2)] = <u>25–7+2–4+1–3+2 = 30 – 14 = 16</u>

► x + (y – z) – (2x – y) = <u>x + y – z – 2x + y = - x + 2y – z</u>

a) (9 – 4) + (8 – 3) = ____________________

b) 56 – (3 + 5 + 11) = ____________________

c) (9 – 6 + 3) – (8 – 7 + 1) = ____________________

d) 40 + [25 – (3 + 2)] = ____________________

e) $150 - [(5 - 1) - (4 - 3)] =$ ____

f) $(14 + 5) - (6 - 4 + 3) + (6 - 4 + 2) =$ ____________________________

g) $(a - x) - (m - n) =$ ____

h) $(b + c) + (m - n) =$ ____

Def.

Para la ***multiplicación*** de números enteros:

- ✓ El valor absoluto del producto es igual al producto de los valores absolutos de los factores.
- ✓ Si los dos factores tienen el mismo signo, el producto es positivo; y si tienen signos contrarios, el producto es negativo.

Ésta última afirmación es conocida como la regla de los signos y podemos escribirla como sigue:

- ♦ El producto de dos enteros positivos es positivo.
- ♦ El producto de dos enteros negativos es positivo
- ♦ El producto de un entero negativo y uno positivo es negativo.

2.2.12 REALIZA LAS SIGUIENTES MULTIPLICACIONES DE NÚMEROS ENTEROS.

Ejemplos

► $(-x)(-y)(-3)(4) = \underline{(xy)(-12) = -12xy}$

1. $8(-5) =$ ___________
2. $-8(2)(-3) =$ ___________
3. $-5(-6)(-3) =$ ___________
4. $-4(5)(-3)(2) =$ ________
5. $(xy)(0) =$ ___________
6. $(3)(5) =$ ___________
7. $(-m)(-n) =$ ___________
8. $(-x)(y) =$ ___________
9. $(2x)(-3) =$ ___________
10. $(-mn)(-x) =$ ___________
11. $(-5)(-8) =$ ___________
12. $(2)(3)(-1) =$ ___________

Def.

De las propiedades de la multiplicación ya vistos se deduce la regla para la ***división*** de los números enteros:

- ✓ El valor absoluto del cociente es igual al cociente de los valores absolutos del dividendo y divisor.
- ✓ El signo del cociente es positivo, si el dividendo y divisor tiene el mismo signo. Si tienen signos contrarios, el cociente es negativo.

Al igual que en la multiplicación, esto significa que:

- ♦ El cociente de dos enteros positivos es positivo.
- ♦ El cociente de dos enteros negativos es positivo.
- ♦ El cociente de un entero negativo y uno positivo es positivo.

2.2.13 ENCUENTRA EL COCIENTE EN LOS SIGUIENTES EJERCICIOS.

Ejemplos

- ► (- 8) ÷ (- 4) = 2

a) (- 20) ÷ (4) = __________

b) (12) ÷ (-3) = __________

c) (15) ÷ (5) = __________

d) (- 24) ÷ (-6) = __________

e) 0 ÷ (-2) = __________

f) (- m) ÷ (-x) = __________

g) (5) ÷ (-n) = __________

h) 100 / (-25) = __________

i) 0 / 1 = __________

j) xy / 0 = __________

Def. En la potenciación de números enteros:

- ✓ El valor absoluto de la potencia es igual a la potencia del valor absoluto de la base.
- ✓ De acuerdo con la regla de los signos de la multiplicación, las potencias de números positivos son siempre positivas; y las potencias de números negativos son positivas si el exponente es par, y negativas si el exponente es impar.

2.2.14 INDICA EL RESULTADO DE LAS SIGUIENTES OPERACIONES DE POTENCIACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS.

Ejemplos

- ► $(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = (9)(-3) = -27$ (exponente impar)
- ► $-(x)^5 = -(x{\bullet}x{\bullet}x{\bullet}x{\bullet}x) = -x^5$ (el signo no está elevado a la potencia)
- ► $(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = (4)(4) = 16$ (exponente par)

1. $(-3)^2 =$ __________
2. $(-2)^3 =$ __________
3. $(10)^4 =$ __________
4. $(2^5)^2 =$ __________
5. $(-4)^2 =$ __________
6. $(1)^6 =$ __________
7. $(-1)^5 =$ __________
8. $-(2)^2 =$ __________
9. $-(y)^3 =$ __________
10. $(-x)^5 =$ __________
11. $(-yz)^8 =$ __________
12. $-(-mn)^3 =$ __________

2.2.15 APLICANDO LAS PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES ESTUDIADAS, CONTESTAR LAS SIGUIENTES PREGUNTAS.

A) El módulo de –2 es ________________
B) El valor absoluto de +10 es ____________________
C) El resultado de sumar dos números enteros es siempre otro número entero por la propiedad de __________________________________
D) m + n = n + m por la propiedad ______________________________
E) x + (y + z) = (x + y) + z por la propiedad _______________________
F) El elemento neutro aditivo es ___________________________
G) El elemento neutro multiplicativo es ______________________
H) El inverso aditivo de *a* es __________________________________
I) El simétrico de – 7 es ______________________________________
J) El producto de dos enteros es siempre un número entero por la propiedad de ____
K) $xy = yx$ por la propiedad ____________________ de la multiplicación
L) $m(n + p) = mn + mp$ por la propiedad _____________________ de la multiplicación
M) x y $-x$ son ____
N) Explica porqué al elevar un número negativo a un exponente par, el resultado es positivo. ______________________________________
O) Explica porqué un número negativo elevado a un exponente impar da como resultado una potencia con signo negativo. _________________

Def. Los ***factores primos*** de un número son aquellos números primos que pueden servir como un divisor exacto para dicho número.

2.2.16 DESCOMPONER EN SUS FACTORES PRIMOS LOS NÚMEROS SIGUIENTES:

Procedimiento

Para encontrarlos se va dividiendo en forma progresiva únicamente entre los números primos (2, 3, 5, etc.) con los que se pueda hacer división exacta, sin importar que se repitan, hasta lograr que el número indicado se reduzca a la unidad.

Lo usual es colocar una línea vertical a la derecha del número. A la derecha de dicha línea se van colocando los divisores primos y a la izquierda los cocientes resultantes (que luego funcionan como dividendos).

Ejemplos

► 120.

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$120 = \underline{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3 \times 5}$

1. 64 ______________________________

2. 91 ______________________________

3. 160 ______________________________

4. 408 ______________________________

5. 2401 ______________________________

Def. El ***máximo común divisor*** de dos o más números es el mayor de los divisores comunes a esos números.

2.2.18 HALLAR EL MÁXIMO COMUN DIVISOR (MCD) DE LOS SIGUIENTES NÚMEROS.

Procedimiento

Realizamos la factorización en números primos simultánea del conjunto de números propuestos y eliminamos los divisores que no son comunes a todos los números que se están descomponiendo.

Ejemplos

♦MCD de 10, 20, 30, y 40 = <u>2x5 = 10</u> ♦MCD de 18, 36 y 72 = <u>2x3x3 = 2 x 3^2 =18</u>

10	20	30	40	
5	10	15	20	2
5	5	15	10	$\cancel{2}$
5	5	15	5	$\cancel{2}$
5	5	5	5	$\cancel{3}$
1	1	1	1	5

18	36	72	
9	18	36	2
9	9	18	$\cancel{2}$
9	9	9	$\cancel{2}$
3	3	3	3
1	1	1	3

1. 15 y 30 ________________	2. 20 y 16 ________________
3. 3, 6 y 9 ________________	4. 22, 33, y 44 ________________
5. 32, 48, 64 y 80 ________________	6. 144 y 520 ________________

3. Números racionales

Def. Los ***números racionales*** son todos aquellos que pueden expresarse de la forma a/b donde a y b son números enteros y $b \neq 0$.
Los números representados de esta forma (a/b) usualmente son llamados *fracciones comunes*.
Representamos al conjunto de los números racionales con la letra $\mathbb{Q}$.

La fracción cuyo numerador es *menor* que el denominador, se llama ***fracción propia***; y la fracción cuyo numerador es *igual o mayor* que el denominador, recibe el nombre de ***fracción impropia***.

2.3.1 ESCRIBE LOS SIGUIENTES NÚMEROS MIXTOS COMO FRACCIONES IMPROPIAS.

Procedimiento

Para obtener el numerador de la fracción impropia, se multiplica el entero por el denominador, y al producto se le suma el numerador de la parte fraccionaria.

Ejemplos

► $3\frac{2}{7} = \frac{(3 \times 7) + 2}{7} = \frac{21 + 2}{7} = \frac{23}{7}$

1. $4\frac{3}{5}$ ____
2. $8\frac{3}{4}$ ____
3. $6\frac{3}{5}$ ____
4. $5\frac{2}{7}$ ____
5. $1\frac{1}{2}$ ____
6. -5 ____
7. 8 ____

2.3.2 ESCRIBE LAS SIGUIENTES FRACCIONES IMPROPIAS COMO UN NÚMERO MIXTO.

Procedimiento

El *cociente entero* que resulta de dividir el numerador entre el denominador es la *parte entera* del número mixto, y la parte fraccionaria es expresada por el cociente del residuo entre el divisor.

Ejemplos

- $\frac{14}{3} = 4 + \frac{2}{3} = 4\,\frac{2}{3}$ $\qquad \begin{array}{r} 4 \\ 3\overline{)\,14} \\ 2 \end{array}$

1. $\frac{21}{2}$ ______________________________
2. $\frac{48}{5}$ ______________________________
3. $\frac{23}{3}$ ______________________________
4. $\frac{29}{6}$ ______________________________
5. $\frac{57}{4}$ ______________________________
6. $\frac{14}{7}$ ______________________________

2.3.3 ESCRIBE LAS SIGUIENTES FRACCIONES EN FORMA DECIMAL, EFECTUANDO LA DIVISIÓN INDICADA.

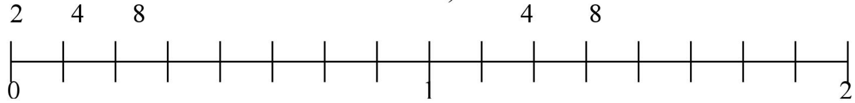
1. $\frac{2}{7}$ ____________
2. $\frac{40}{12}$ ____________
3. $\frac{9}{15}$ ____________
4. $\frac{3}{5}$ ____________
5. $\frac{5}{3}$ ____________
6. $\frac{5}{8}$ ____________

Def. Toda fracción común puede representarse como un número decimal, que puede ser exacto o periódico.

Def. Si dos fracciones ocupan el mismo punto en la recta numérica, son ***equivalentes***.
Todas las fracciones equivalentes a una fracción dada forman una clase de equivalencia.

2.3.4 DEMUESTRA GRÁFICAMENTE QUE LAS SIGUIENTES FRACCIONES SON EQUIVALENTES.

A) $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$ $\qquad$ B) $\frac{5}{4} = \frac{10}{8}$



2.3.5 HALLA CUATRO FRACCIONES EQUIVALENTES A CADA UNA DE LAS QUE ESE INDICAN.

Procedimiento

Dada una fracción, podemos obtener fracciones equivalentes a ella, al multiplicar el numerador y el denominador por un mismo número.

1. $\frac{2}{3}$ ____
2. $\frac{4}{5}$ ____
3. $\frac{5}{2}$ ____
4. $\frac{5}{4}$ ____
5. $\frac{7}{6}$ ____
6. $\frac{2}{1}$ ____

Def. Simplificar una fracción es transformarla en otra equivalente que tenga sus términos más sencillos.
La simplificación de una fracción es posible, si su numerador y denominador son divisibles entre un mismo número.
Las fracciones que no se pueden simplificar porque sus términos no tienen un divisor común, se llaman ***fracciones irreducibles***.

2.3.6 SIMPLIFICA LAS SIGUIENTES FRACCIONES.

Ejemplos

► $\frac{44}{77} = \frac{44 \div 11}{77 \div 11} = \frac{4}{7}$

1. $\frac{20}{24}$ ____
2. $\frac{168}{252}$ ____
3. $\frac{125}{450}$ ____
4. $\frac{111}{185}$ ____
5. $\frac{125}{750}$ ____
6. $\frac{270}{150}$ ____
7. $\frac{648}{144}$ ____

8. $\frac{252}{468}$ ______________________________

9. $\frac{72}{84}$ ______________________________

10. $\frac{360}{504}$ ______________________________

2.3.7 DEMOSTRAR QUE CADA NÚMERO RACIONAL PUEDE EXPRESARSE COMO UN COCIENTE DE DOS ENTEROS.

Ejemplos

♦ $18 = \frac{18}{1}$ ♦ $-9.5 = -\frac{95}{10} = -\frac{19}{2}$

1. 14	____________	5. – 0.5	____________
2. –7	____________	6. – 0.03	____________
3. 4.2	____________	7. – 0.68	____________
4. 1.5	____________	8. 7 ½	____________

Def. Para los números racionales se cumplen también las mismas propiedades de la adición y multiplicación que para los enteros.
Es un conjunto ordenado, por lo que también se cumple la ley de tricotomía de orden.

2.3.8 USAR < O > PARA ESCRIBIR UNA AFIRMACIÓN VERDADERA.

Procedimiento

Para comparar dos fracciones comunes podemos convertirlas en fracciones equivalentes.

Ejemplos

► $\frac{2}{5} > \frac{1}{4}$ porque $\frac{2}{5} = \frac{8}{20} > \frac{1}{4} = \frac{5}{20}$

A.	1.48	________	1.84	H.	- 14.5	________	0. 011
B.	- 3.46	________	1.34	I.	- 12.88	________	- 13
C.	- 4.25	________	- 5.2	J.	- 4/9	________	2/5
D.	¾	________	5/8	K.	4/10	________	- ½
E.	- 2/3	________	- 5/8	L.	- 0.99	________	- 0.9999
F.	5/6	________	7/8	M.	4/11	________	2/5
G.	- 2/3	________	- 4/5	N.	7.075	________	7.750
				O.	4/5	________	7/8

2.3.9 REALIZAR LAS SIGUIENTES OPERACIONES DE ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS RACIONALES. SIMPLIFICA EL RESULTADO.

Procedimiento

- ✓ Para sumar o restar dos fracciones con igual denominador, sumamos los numeradores y se coloca el mismo denominador.
- ✓ Al efectuar una adición o sustracción de fracciones con distinto denominador, éstas se convierten a fracciones equivalentes con igual denominador y se efectúa la suma en la forma indicada.

Ejemplos

- ▶ $\frac{6}{5} - \frac{2}{5} = \frac{6-2}{5} = \frac{4}{5}$
- ▶ $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2} + \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4+3}{6} = \frac{7}{6}$

1.	– 3/5 + 2/5 =
2.	– 3/7 + (– 5/7) =
3.	– 5/8 + ¼ =
4.	– 3/7 + (– 2/5) =
5.	– 5/9 + (– 1/18) =
6.	– 44 + (– 3/8) + 95 + (– 5/8) =
7.	– 3/12 + 3/18 + (– 7/6) + 2 =
8.	– 17 + 28 + (– 12) + (– 20.5) + 16.5 =
9.	4 – 7 =
10.	– 4.5 – 2 =
11.	– ½ - ¾ =

12.	$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} =$
13.	$\frac{1}{8} + (-\frac{3}{8}) - (\frac{1}{2}) =$
14.	$6.04 - 1.1 =$
15.	$-(3/8) - (-\frac{1}{2}) =$
16.	$1/5 + 2/3 - 3/2 + 2/5 =$

Def. El ***producto*** de dos fracciones es otra fracción, cuyo numerador es el producto de los numeradores y su denominador es el producto de los denominadores.

2.3.10 MULTIPLICAR LOS SIGUIENTES NÚMEROS RACIONALES. SIMPLIFICA EL RESULTADO.

Ejemplos

► $\frac{2}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{9 \times 4} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

1. $(7.2)(-5) =$ ______________________________
2. $(-2/3)(9/4) =$ ______________________________
3. $-8(0) =$ ______________________________
4. $(-5/6)(-1/9) =$ ______________________________
5. $-4.2(-3) =$ ______________________________
6. $(-m/n)(-x/y) =$ ______________________________
7. $(-1/2)(8)(-2/3)(-6) =$ ______________________________
8. $(-7)(-2/3)(-1/7)(9) =$ ______________________________
9. $(-3/5)(-2/7) =$ ______________________________
10. $-3.5(-28) =$ ______________________________
11. $(1/5)(-2/9) =$ ______________________________

12. $(-1/9)(-2/3)(5/7) =$ ______________________________

13. $(-7/2)(-5/7)(-2/5) =$ ______________________________

14. $(-5/6)(1/8)(-3/7)(-1/7) =$ _________________________

15. $(4/5)(5/4) =$ ______________________________

16. $(x/y)(y/x) =$ ______________________________

Def. Además de tener las mismas propiedades de la multiplicación de los enteros, los números racionales contienen la propiedad del ***inverso multiplicativo*** o ***recíproco***:
Para todo número racional $\frac{a}{b}$ diferente de cero, existe otro número racional $\frac{b}{a}$ tal que $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$ cada uno de ellos es el inverso multiplicativo del otro.

2.3.11 ENCONTRAR EL INVERSO **MULTIPLICATIVO** O RECÍPROCO DE LOS SIGUIENTES NÚMEROS RACIONALES.

a) m/n _____________
b) 4 _____________
c) -0.5 _____________
d) $1/3$ _____________
e) $1/4y$ _____________
f) -10 _____________
g) $2\frac{1}{2}$ _____________
h) $-1/8a$ _____________
i) p/q _____________
j) $2a/3b$ _____________
k) $-31/12$ _____________
l) $-4y/3x$ _____________

Def. El ***cociente*** de dos números racionales se obtiene multiplicando el dividendo por el recíproco del divisor.

2.3.12 REALIZA LAS SIGUIENTES DIVISIONES.

Ejemplos

► $\frac{1}{2} \div \frac{2}{8} = \frac{1}{2} \times \frac{8}{2} = \frac{8}{4} = 2$

1. $\frac{3}{4} \div \frac{2}{3}$ _____________
2. $\frac{7}{8} \div \frac{1}{2}$ _____________
5. $-42.3 \div 0$ _____________
6. $0 \div (-2.5)$ _____________
7. $3y \div 2y$ _____________
8. $4 \div (-9)$ _____________

3. $\frac{3}{5} \div \frac{9}{8}$ ______________

4. $\frac{1}{4} \div \frac{5}{9}$ ______________

9. $-\frac{1}{4} \div \frac{1}{2}$ ______________

10. $(-3)^4 \div (-9)$ ______________

11. $(-4)^3 \div (-8)^3$ ______________

2.3.13 POTENCIACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES. DESARROLLAR:

Ejemplos

► $(-2/3)^3 = (-2/3)(-2/3)(-2/3) = \frac{(-2) \times (-2) \times (-2)}{3 \times 3 \times 3} = -\frac{8}{27}$

1. $(\frac{1}{4})^2$ ______________
2. $(\frac{1}{2})^5$ ______________
3. $(m/a)^3$ ______________
4. $(xy/m)^5$ ______________
5. $(\frac{1}{2} + 1/3)^3$ ______________
6. $(5 + 1/5)^2$ ______________
7. $(1 + 1/10)^2$ ______________
8. $(amx)^4$ ______________
9. $(bcde)^n$ ______________
10. $(ab/5cd)^4$ ______________

2.3.14 ESCRIBE LA PROPIEDAD DE LOS NÚMEROS RACIONALES POR LA QUE ES VÁLIDA CADA UNA DE LAS AFIRMACIONES SIGUIENTES. ($a, b, c, m, n, x, y, z \in \mathbb{Q}$)

1. $m + n = n + m$ ______________________________
2. $a(b + c) = ab + ac$ ______________________________
3. $a + [bc + (-bc)] = a + 0$ ______________________________
4. $-(x - 8) = -x + 8$ ______________________________
5. $(x + y) + z = z + (x + y)$ ______________________________
6. $(3a)b = 3(ab)$ ______________________________
7. $6 + (9 + x) = (6 + 9) + x$ ______________________________
8. $-14 + 14 = 0$ ______________________________
9. $3\,(1/3) = 1$ ______________________________
10. $9(m + n) = (m + n)9$ ______________________________
11. $(m\,n)x = m(n\,x)$ ______________________________
12. $(x + y)1 = x + y$ ______________________________
13. $(2a + 3b) + 22 = 22 + (3b + 2a)$ ______________________________
14. $x + z + 0 = x + z$ ______________________________
15. $(1/m)m = 1$ ______________________________

2.3.15 RESUELVE LOS SIGUIENTES PROBLEMAS DE APLICACIÓN DE LAS FRACCIONES.

Ejemplos

- Un pintor pinta una casa con una rapidez de 7¾ m^2 por hora y otro a razón de $6^3/_5$ m^2 por hora ¿cuántos metros cuadrados de superficie pintan entre los dos, en 2 horas?

  $7¾ = {}^{31}/_4$; $6^3/_5 = {}^{33}/_5$;

  En una hora, los dos pintan: 31/4 + 33/5 = (155 + 132)/20 = 287/20 m^2

  En dos horas, pintan: (287/20) x (2) = 574/20 = 287/10 m^2

1. Se dispone de 60 litros de refresco. ¿cuántas botellas se pueden llenar si la capacidad de cada una de ellas es de 3/5 de litro?

2. Un deportista recorre $2^1/_3$ km durante la primera hora, $3^1/_2$ km durante la segunda y $2^2/_5$ en la tercera, ¿cuántos kilómetros recorrió en las tres horas?

3. De un rollo de tela de algodón de 60 m, un comerciante vende 2/5 de ella y después ¾ del resto, ¿cuántos metros de tela le quedan?

4. Un albañil gana $25.00 por hora. ¿cuánto debe cobrar si trabaja $14^3/_5$ horas?

5. Esteban ha gastado 7/9 de sueldo mensual. Si le quedan $4000.00, ¿cuánto gana por mes?

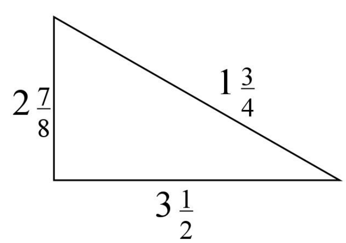
6. Si cortamos una tabla de madera de $6\frac{1}{4}$ m de longitud en 5 partes iguales, ¿cuál es la longitud de cada uno de los trozos?

7. Si un kilogramo de azúcar cuesta \$5.00, ¿cuánto cuestan $7^{3}/_{10}$ kg del mismo?

8. Se embotellan 18000 litros de agua purificada en botellas que tienen una capacidad de $\frac{3}{4}$ de litro. ¿cuántas botellas se llenan?

9. De un tambo de $40^{2}/_{3}$ litros de miel se han vendido $28^{5}/_{6}$, ¿cuántos litros quedan?

10. ¿Cuánto mide el perímetro del triángulo de la siguiente figura?



4. Números Irracionales

Def. Recordemos que un *número racional* es aquel que puede expresarse como *razón* o cociente de dos números enteros.
Un ***número irracional*** es aquel que *no* se puede expresar por medio de una razón o cociente de dos números enteros.
El conjunto de los números racionales y el conjunto de los irracionales, son ajenos.

2.4.1 CLASIFICA LOS SIGUIENTES NÚMEROS EN RACIONALES O IRRACIONALES.

1. $\frac{1}{4}$ ______________________
2. π ______________________
3. $\sqrt{2}$ ______________________
4. $\sqrt{100}$ ______________________
5. $\sqrt{4/5}$ ______________________
6. $\sqrt{13}$ ______________________
7. e ______________________
8. $\sqrt{81}$ ______________________
9. $\sqrt{9/25}$ ______________________
10. 2π ______________________
11. m/n ______________________
12. $5x$ ______________________
13. 0 ______________________
14. $-\sqrt{1}$ ______________________
15. $\sqrt{x^2/y^2}$ ______________________
16. $\sqrt{y^4}$ ______________________

Def.

Exponentes Fraccionarios.

Si m/n es un número racional con *n* positivo, entonces

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Es decir, el numerador del exponente fraccionario es el exponente del radicando y el denominador del exponente es el índice del radical.

2.4.2 EXPRESA LOS SIGUIENTES RADICALES EN FORMA EXPONENCIAL.

Ejemplos

- $\sqrt[3]{x^5} = x^{5/3}$
- $\sqrt{x} = x^{1/2}$ Nota: cuando el índice del radical es 2, por lo general no se escribe.

1. $\sqrt{x^2}$ __________
2. $\sqrt[3]{x^6}$ __________
3. $\sqrt[3]{x}$ __________
4. $\sqrt{x^3}$ __________
5. $\sqrt[4]{x}$ __________
6. $\sqrt[3]{x^2}$ __________
7. $\sqrt[4]{x^2}$ __________
8. $\sqrt[4]{x^3}$ __________

2.4.3 ESCRIBE EN FORMA RADICAL LAS SIGUIENTES EXPRESIONES.

Ejemplos

- $x^{5/4} = \sqrt[4]{x^5}$
- $x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$

1. $x^{1/2}$ __________
2. $x^{2/3}$ __________
3. $x^{3/7}$ __________
4. $x^{1/3}$ __________
5. $x^{2/9}$ __________
6. $x^{1/4}$ __________
7. $x^{3/5}$ __________
8. $x^{3/8}$ __________
9. $x^{1/5}$ __________
10. $x^{4/5}$ __________

Def. Tomemos en cuenta algunas propiedades importantes de los radicales:

- ✓ $\sqrt[n]{a^n} = a$
- ✓ $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- ✓ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- ✓ $\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$

2.4.4 SIMPLIFICA LAS SIGUIENTES EXPRESIONES RADICALES.

Ejemplos

- $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \times 2} = \sqrt[3]{2^3 \times 2} = \sqrt[3]{2^3}\,\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$
- $\sqrt{75a^3b^2} = \sqrt{25a^2b^2(3a)} = \sqrt{(5ab)^2(3a)} = \sqrt{(5ab)^2}\sqrt{(3a)} = 5ab\sqrt{3a}$

1. $\sqrt{20}$ ____________________
2. $\sqrt{3x^2}$ ____________________

3. $\sqrt{29t^2}$ ______________________________

4. $\sqrt{9x^2}$ ______________________________

5. $\sqrt{125a^2}$ ______________________________

6. $\sqrt{4x^2 + 8x + 4}$ ______________________________

7. $\frac{3}{4}\sqrt{48}$ ______________________________

8. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{16}$ ______________________________

9. $\sqrt[3]{-8}$ ______________________________

10. $\sqrt[3]{mn^3}$ ______________________________

11. $\sqrt[3]{16a^4}$ ______________________________

12. $\sqrt[3]{a^3b^3}$ ______________________________

Def. Realizamos la suma de radicales *semejantes* de la siguiente manera:

$$p\sqrt[n]{a} + q\sqrt[n]{a} = (p + q)\sqrt[n]{a}$$

2.4.5 EFECTÚA LAS OPERACIONES DE SUMA O RESTA INDICADAS SOBRE LAS SIGUIENTES EXPRESIONES RADICALES.

Ejemplos

- $2\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{4} = (2 + 1)\sqrt[3]{4} = 3\sqrt[3]{4}$
- $3\sqrt{72x} - 7\sqrt{98x} - 8\sqrt{2x} = 3\sqrt{6^2(2x)} - 7\sqrt{7^2(2x)} - 8\sqrt{2x} =$
  $= 3x6\sqrt{2x} - 7x7\sqrt{2x} - 8\sqrt{2x} = (18 - 49 - 8)\sqrt{2x}$
  $= -39\sqrt{2x}$

1. $2\sqrt{5} + 7\sqrt{5} - 4\sqrt{5} =$ ______________________________

2. $7\sqrt{2x} - 5\sqrt{8x} - 4\sqrt{32x} =$ ______________________________

3. $\sqrt{xy} - 3\sqrt{xy} + \sqrt{xy} =$ ______________________________

4. $\sqrt{x^3} - 2\sqrt{4x^3} - x\sqrt{16x} =$ ______________________________

5. $5\sqrt{8} + 15\sqrt{2} =$ ______________________________

6. $\sqrt{72} + \sqrt{98} =$ ______________________________

7. $2\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48} =$ ______________________________

8. $3\sqrt{18} - 2\sqrt{32} - 5\sqrt{50} =$ ______________________________

9. $2\sqrt{27} - 3\sqrt{48} =$ ______________________________

10. $\sqrt{4x} + \sqrt{81x^3} =$ ______________________________

11. $\sqrt{27} - \sqrt{12x^2} =$ ______________________________

12. $\sqrt{12} + \sqrt{27} =$ ______________________________

13. $4\sqrt{300} + \sqrt{192} + \sqrt{243} =$ ______________________________

14. $\frac{1}{2}\sqrt{8} + \frac{3}{5}\sqrt{50} =$ ______________________________

2.4.6 EFECTÚA LA MULTIPLICACIÓN ENTRE RADICALES INDICADA Y SIMPLIFICADA.

Ejemplos

► $\sqrt{2x^2}\sqrt{2x^4} = \sqrt{(2x^2)(2x^4)} = \sqrt{4x^6} = 2x^3$

1. $\sqrt{2}\ \sqrt{8} =$

2. $\sqrt{xy}\ \sqrt{x} =$

3. $\sqrt{5a^3}\sqrt{20a} =$

4. $\sqrt{x^3}\ \sqrt{2x} =$

7. $\sqrt{x-3}\sqrt{x+4} =$

8. $\sqrt{12x^3}\sqrt{5x}\ \sqrt{45} =$

9. $3\sqrt{7}\ 5\sqrt{35} =$

10. $\sqrt[3]{4}\ \sqrt[3]{6} =$

5. $\sqrt{18x^2y}\,\sqrt{2xy^3} =$

11. $\sqrt[3]{10}\ \sqrt[3]{20} =$

6. $\sqrt{x}\,\sqrt{x-3} =$

12. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}\ 3\sqrt[3]{6} =$

2.4.7 EFECTÚA LAS SIGUIENTES DIVISIONES DE RADICALES Y SIMPLIFICA.

Ejemplos

► $\dfrac{\sqrt{32y^4}}{\sqrt{2x^3y^2}} = \sqrt{\dfrac{32y^4}{2x^3y^2}} = \sqrt{\dfrac{16y^2}{x^3}} = \dfrac{4y}{\sqrt{x^3}} = \dfrac{4y}{x\sqrt{x}}$

1. $\dfrac{\sqrt{48xy^5}}{\sqrt{3x^5y}} =$

6. $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} =$

2. $\dfrac{\sqrt{8x^5y}}{\sqrt{2x}} =$

7. $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{15}} =$

3. $\dfrac{\sqrt{x^4y^5}}{\sqrt{4x^2y}} =$

8. $\dfrac{\sqrt{18x^4y^5}}{\sqrt{2xy}} =$

4. $\dfrac{\sqrt{75x}}{\sqrt{3}} =$

9. $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} =$

5. $\dfrac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{25x}} =$

10. $\dfrac{{}^{3}/_{5}\sqrt[3]{686}}{{}^{6}/_{5}\sqrt[3]{2}} =$

Nota que $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

2.4.8 ELEVA LOS SIGUIENTES RADICALES A LA POTENCIA INDICADA.

Procedimiento

- ✓ Expresa los radicales en forma exponencial.
- ✓ Realiza la operación de potencia de una potencia, multiplicando el exponente fraccionario por el exponente al que elevaremos el radical. Simplifica.

Ejemplos

- ► $(\sqrt[5]{50})^3 = (50^{1/5})^3 = 50^{3/5} = \sqrt[5]{50^3} = \sqrt[5]{125000} = \sqrt[5]{5^5(40)} = 5\sqrt[5]{40}$

1. $(\sqrt{5})^2 =$ ______________________
2. $(\sqrt{3})^3 =$ ______________________
3. $(\sqrt[3]{4})^2 =$ ______________________
4. $(\sqrt[3]{18})^2 =$ ______________________
5. $(\sqrt[3]{15})^2 =$ ______________________

2.4.9 EXTRAER LA RAIZ INDICADA DE LOS SIGUIENTES RADICALES.

Procedimiento

Recuerda que un radical puede representarse como un exponente fraccionario. De esta forma, se realiza la operación de potencia de una potencia: $(x^{1/n})^{1/m} = x^{1/nm}$ Es decir, el índice de la raíz de una raíz, es el producto de los índices de los radicales.

Ejemplos

- ► $\sqrt{\sqrt{32}} = (32^{1/2})^{1/2} = 32^{1/2 \times ½} = 32^{1/4} = \sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2^4 \times 2} = 2\sqrt[4]{2}$

Def. La división de dos radicales es considerada como completa cuando el cociente no tiene radicales en el denominador y si hay algún radical en el numerador, está expresado en su forma más simple. Al proceso de quitar radicales de un denominador le llamamos ***racionalización*** del denominador.

2.4.10 RACIONALIZAR EL DENOMINADOR DE LOS SIGUIENTES QUEBRADOS.

Procedimiento

Obtenemos una fracción equivalente multiplicando el numerador y el denominador por el radical del denominador: $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}}\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$

Ejemplos

- $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\frac{1}{\sqrt[3]{16}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^4}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^6}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{4}$

1. $\frac{1}{\sqrt{7}} =$
2. $\frac{3}{\sqrt{2}} =$
3. $\frac{9}{\sqrt{32}} =$
4. $\frac{1}{2\sqrt{2}} =$
5. $\frac{1}{3\sqrt{3}} =$
6. $\frac{x}{\sqrt{x}} =$
7. $\frac{9x}{\sqrt{x}} =$
8. $\frac{10z}{\sqrt{5z}} =$

5. Números Reales

Def. La unión del conjunto de los números racionales con el conjunto de los irracionales da como resultado el conjunto de los ***números reales***.
La adición y multiplicación de los números reales tienen las siguientes propiedades: cerradura, conmutativa, asociativa, elemento neutro y elemento inverso.

2.5.1 EN EL RECUADRO DE ABAJO, REALIZA EL DIAGRAMA DE VENN CORRESPONDIENTE AL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES. SI:

$\mathbb{R} =$ {Números reales}

$\mathbb{Q} =$ {Números racionales}

$\mathbb{Z} =$ {Números enteros}

$\mathbb{N} =$ {Números naturales}

$\mathbb{I} =$ {Números irracionales}

Y SABES QUE:

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$; $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ y {números racionales}$\cap${números irracionales}$=\phi$

2.5.2 FRENTE A CADA EXPRESIÓN ESCRIBE LA PROPIEDAD DE LOS NÚMEROS REALES POR LA CUAL LA PROPORCIÓN INDICADA ES VERDADERA.

1. $7 + x = x + 7$ ______________________________
2. $4 + 0 = 4$ ______________________________
3. $-m + m = 0$ ______________________________
4. $x + (y + 5) = (x + y) + 5$ ______________________________
5. $1t = t$ ______________________________
6. $ab = ab$ ______________________________
7. $m(nx) = (mn)x$ ______________________________
8. $6(1/6) = 1$ ______________________________

2.5.3 EFECTÚA LAS OPERACIONES QUE SE INDICAN.

1. $7 + (-4)$ __________
2. $(-10) - (-5) + 5$ __________
3. $(-5)(4)$ __________
4. $5(-4)(-2)$ __________
5. $(-5)(-6)(-1)$ __________
6. $[42 \div (-7)] - 6$ __________
7. $64 \div (-16)$ __________
8. $-8 \div (-2)$ __________

2.5.4 EXPRESA EL RESULTADO DE LAS SIGUIENTES OPERACIONES SIN EXPONENTES NULOS Y SIN EXPONENTES NEGATIVOS.

1. $a^4b^2(a^3b)$ ______________
2. $(a^4b^3c^2)^2$ ______________
3. $x^9(x^{-2})$ ______________
4. a^6a^{-6} ______________
5. $a^{-7}a^3$ ______________
6. $a^{-2}a^2$ ______________
7. $\frac{a^{14}}{a^9}$ ______________
8. $\frac{a^{12}y^7}{a^8y^6}$ ______________

2.5.5 RESPONDE CORRECTAMENTE.

1. Si a y b son números impares, ¿cuál de las siguientes expresiones representa un número par?

   a) ab b) a^b c) $a + 2b$ d) $a + b$ e) $ab - 2$

2. Si $a > 0$ y $b < 0$, ¿cuál de las siguientes expresiones representa un número positivo?

   a) ab b) $b - a$ c) $a - b$ d) b/a e) a/b

3. ¿Cuántas veces es mayor el área del cuadrado T que la del S de las siguientes figuras?

$L = 5$ $L = \sqrt{5}$

4. Si $M = 2^{80} + 2^{80}$ y $N = 4^{40}$, ¿cuál de las siguientes proposiciones es verdadera?

   a) $M = N$ b) $M > N$ c) $M < N$

5. Calcula el valor de $24^6/12^6$

6. Si $a - b = 10$, ¿cuál de las siguientes proposiciones tiene que ser verdadera?

   a) $a < b$ b) $a > 10$ c) $b < 10$ d) $b > 7$ e) $a > b$

7. Evalúa la expresión: $\dfrac{(-1)^7 + (-1)^9}{(-1)^8 + (-1)^{12}}$

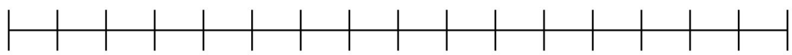
8. Si $(x - 4)(1/x) = 0$, ¿cuál es el valor de x?

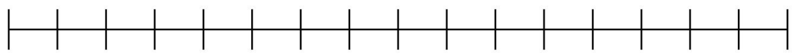
Def. Los números reales tienen dos propiedades importantes:

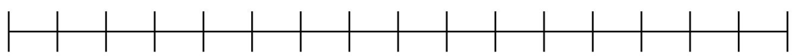
Propiedad de ***tricotomía***: Si tenemos dos números reales a y b, una y sólo una de las siguientes relaciones se cumple: $a > b$, $a < b$ o $a = b$.

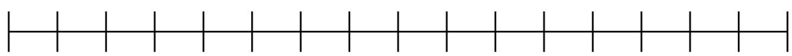
Propiedad de ***densidad***: Dados dos números reales a y b, tales que $a < b$, siempre es posible encontrar un número real c, tal que $a < c < b$.

2.5.6 ENCUENTRA DOS NÚMEROS REALES QUE SE ENCUENTREN ENTRE LOS DOS DADOS. REPRESÉNTALOS EN LA RECTA NUMÉRICA ESCOGIENDO UNA ESCALA ADECUADA.

a. 1 y 2 

b. - 5 y – 4.5 

c. ½ y ¾ 

d. π y 2π 

2.5.7 ESCRIBE DENTRO DEL PARÉNTESIS LA LETRA QUE CORRESPONDA A LA RESPUESTA CORRECTA.

1. El inverso aditivo de 13 es: ( )

   a) 1/13 b) 13 + 0 = 10 c) – 13 d) 13 x 1 = 13

2. El inverso multiplicativo de 4/5 es: ( )

   a) – 4/5 b) 4/-5 c) 5/4 d) – 5/4

3. El inverso multiplicativo de cero es: ( )

   a) cero b) uno c) cualquier número real d) no existe

4. La propiedad de tricotomía de orden de los reales: ( )

   a) Dice que los reales son un conjunto denso.
   b) Expresa que para dos reales sólo se cumple una de las relaciones siguientes: $a = b$, $a > b$ o $a < b$.
   c) Hace que el conjunto de los números reales sea un grupo.
   d) Indica que si $a < b$, entonces existe c, tal que $a < c < b$.

Def. Los números muy pequeños y los muy grandes comúnmente se expresan en lo que se denomina ***notación científica***. Esta notación consiste en escribir el número dado por el producto de un número mayor o igual a uno, pero menor que diez multiplicado por la potencia correspondiente a diez.

2.5.8 EXPRESA LOS SIGUIENTES NÚMEROS EN NOTACIÓN CIENTÍFICA.

Procedimiento

Una forma sencilla de escribir un número en notación científica, es correr su punto decimal hasta tener solo una cifra entera a la izquierda de dicho punto. El número de cifras que se corre, será el exponente de 10, el cual será positivo si el punto decimal se ha movido hacia la izquierda y negativo si se ha movido hacia la derecha.

Ejemplos

- 1584 = $\underline{1.584 \times 10^3}$ (el punto se corrió tres lugares a la izquierda)
- 0.00024 = $\underline{2.4 \times 10^{-4}}$ (el punto se corrió cuatro lugares a la derecha)

1. 346 ______________
2. 0.00125 ______________
3. 0.0000462 ______________
4. 38 000 ______________
5. 0.0027 ______________
6. 0.462 ______________
7. 12 500 000 ______________
8. 48 000 000 ______________
9. 3 500 000 ______________
10. 0.00065 ______________
11. 462 000 000 ______________
12. 4900 ______________
13. 0.23 ______________
14. 0.00000085 ______________

Def. Los números expresados en notación científica se ***multiplican*** multiplicando sus partes decimales y sus potencias de diez separadamente. El producto final se expresa en notación científica.

De igual forma, se ***dividen*** dividiendo sus partes decimales y sus potencias de diez separadamente. El cociente se expresa también en notación científica.

NOTA: recuerda que para multiplicar las potencias de diez se suman sus exponentes, y para dividirlas, los exponentes se restan.

2.5.9 EFECTÚA LAS SIGUIENTES OPERACIONES. EXPRESA EL RESULTADO EN NOTACIÓN CIENTÍFICA.

Ejemplos

- $(2.58 \times 10^5) \times (7.48 \times 10^3) = \underline{(2.58 \times 7.48) \times (10^5 \times 10^3) = 19.3 \times 10^8 = 1.93 \times 10^9}$
- $(3.1 \times 10^{-3}) \div (2.4 \times 10^{-5}) = \underline{(3.1 \div 2.4) \times (10^{-3} \div 10^{-5}) = 1.3 \times 10^{-3-(-5)} = 1.3 \times 10^2}$

1. $(9 \times 10^{7})(4 \times 10^{6}) =$ ______________________________

2. $(4 \times 10^{-5})(5 \times 10^{-1}) =$ ______________________________

3. $(2.4 \times 10^{5})^{2} =$ ______________________________

4. $\dfrac{15 \times 10^{-4}}{5 \times 10^{4}} =$ ______________________________

5. $\dfrac{3 \times 10^{5}}{4 \times 10^{-6}} =$ ______________________________

6. $\dfrac{9 \times 10^{2}}{3 \times 10^{8}} =$ ______________________________

7. $\dfrac{0.00000000014 \times 300\,000\,000}{0.00000007} =$ ______________________________

8. Expresa en notación científica la cantidad de segundos que tiene un año bisiesto.

9. Calcula cuántas veces es mayor la masa del Sol que la masa del planeta Mercurio si:
   m_S = 198 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 kg
   m_m= 324 000 000 000 000 000 000 000 000 kg

10. Expresa en notación científica y en metros la distancia de la Tierra al Sol, si es de 149 500 000 km.

Unidad Temática 3

RELACIONES ENTRE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1. Expresión Algebraica

Def. Una *variable* es un símbolo, normalmente representado por una literal: a, b, c, x, y, z, etc., que nos sirven para representar elementos cualesquiera de un conjunto universal que se toma como referencia.

Al combinar variables con operaciones (adición, multiplicación, potenciación, etc.) obtenemos ***expresiones algebraicas***.

3.1.1 ESCRIBE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA QUE REPRESENTE CADA UNO DE LOS SIGUIENTES ENUNCIADOS.

Procedimiento

Aprende a identificar las palabras clave:

- ✓ “suma”, “mas” o “aumentado”, lo representamos como +.
- ✓ “diferencia”, “menos” o “disminuido” indica una resta.
- ✓ “producto” o la palabra “veces” (doble, triple, etc.) indica una multiplicación.
- ✓ “semisuma”, “mitad”, “cociente”, implican división.

Ejemplos

- ► Un número cualquiera ____a____
- ► El producto de dos enteros consecutivos ____n (n + 1)____

1. El doble de un número ____________________
2. El doble de un número aumentado en 7 ____________________
3. La diferencia de dos números ____________________
4. La diferencia de dos cuadrados ____________________
5. El triple del cubo de un número ____________________
6. Un número disminuido en 6 ____________________
7. El triple de un número aumentado en 12 ____________________
8. El cociente de dos números ____________________
9. El producto de dos números ____________________
10. La raíz cuadrada de un número ____________________
11. El doble de la diferencia de dos números ____________________
12. Cuatro veces la diferencia de dos cuadrados ____________________
13. El cubo de la mitad de un número ____________________
14. La mitad de un número ____________________

15. 5 veces un número menos tres ____________________________
16. El miércoles Ana corrió 2 km más que el doble de la distancia que corrió el martes. Sea y = el número de kilómetros que corrió el martes. Plantear una expresión para el número de kilómetros que corrió el miércoles.

    ____
17. A Zury le quedaron $2 más que la mitad de su sueldo. Sea a= el monto de su sueldo. Plantear una expresión para lo que le quedó.

    ____
18. Un DVD cuesta $3.50 más que un CD. Plantear una expresión para el costo total de 1 DVD y 1 CD.

    ____
19. Hay 9 libros menos de español que de historia. Plantear una expresión para el número total de libros.

    ____
20. Expresa la suma de un entero par y el siguiente entero par

    ____

3.1.2 DETERMINA UN ENUNCIADO VERBAL QUE REPRESENTE LAS SIGUIENTES EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

Ejemplos

- $a - 1$ — Un número disminuido en uno
- $\frac{1}{2} x^2$ — La mitad del cuadrado de un número

1. $3a$ ____
2. xy^2 ____
3. $x + y$ ____
4. $m - n$ ____
5. $a^3 + b^3$ ____
6. $3(m + n)$ ____
7. x/y ____
8. $10ab$ ____
9. $mn - 5$ ____
10. $(x + y)^3$ ____

Def. Una expresión compuesta por un número o producto de varios números se llama ***término***.

Cualquier factor del término es llamado ***coeficiente*** de los factores restantes.

A los elementos de un término algebraico que acompañan al coeficiente numérico, se les denomina ***parte literal***.

El ***grado*** que le corresponde a un término, es el número de factores literales que intervienen en dicho término. Ya que el ***exponente*** es el número de factores iguales, determinamos el grado de un término mediante la suma de los exponentes de los factores literales.

3.1.3 PARA CADA UNO DE LOS TERMINOS ALGEBRAICOS QUE SE INDICAN, DETERMINAR SU COEFICIENTE NUMÉRICO, PARTE LITERAL, LOS EXPONENTES DE LA PARTE LITERAL Y SU GRADO.

Termino Algebraico	Coeficiente numérico	Parte literal	Exponentes de la parte literal	Grado
$8m^3n^2$	8	m^3n^2	3 y 2	5
$-4xy^2$				
$8a^2b^3c$				
$-3/4\ p^2b^5$				
y^{10}				
am				

Def. Cuando los términos de una expresión aparecen únicamente en sumas, diferencias o productos, se dice que la expresión es un ***polinomio***.

Un polinomio que consta de un solo término se le llama ***monomio***. Si consta de dos términos recibe el nombre de ***binomio***. Los polinomios que constan de tres términos se denominan ***trinomio***.

3.1.4 DECIR SI CADA EXPRESIÓN ES UN POLINOMIO. SI ES POLINOMIO, DETERMINAR SI ES UN MONOMIO, BINOMIO O TRINOMIO.

1. $2/x$ ______________
2. $5 + 6x^2$ ______________
3. $-3m^5 + 6/m - 2$ ______________
4. -48 ______________
5. $-h^2 - 3h + 9$ ______________
6. $r^2/5$ ______________
7. $5x^3 - 6x - 8$ ______________
8. $19p^2qr^5$ ______________

Def. El ***grado de un polinomio*** no constante, con una o más literales, es igual al mayor de los grados de los términos que lo forman.

El grado de un término constante es cero.

3.1.5 IDENTIFICAR EL COEFICIENTE Y GRADO DE CADA TÉRMINO, Y EL GRADO DEL POLINOMIO.

Ejemplos

- $x^2y + 2y^2 + 8x$ El primer término es de tercer grado, el segundo es de segundo grado y el tercero de primer grado. Por lo tanto es un polinomio de tercer grado.

POLINOMIO	COEFICIENTES	GRADO DE CADA TÉRMINO	GRADO DEL POLINOMIO
$-4m^9 + 6m - 1$			
$2x^2y + 5xy^2 - 6y^4$			
$x^8y^6 - 2x^6y^6 + 8x^4y^7 - 4xy^8$			
$12m^{12} - 8m^{11}n^{10} + 5m^5n^{11} - m^4n^{12} + n^{14}$			
$a^5 + 4a^3 - 3a^2 + a$			
$m^4n^3 - 3m^3n^2 + 6m^2n^4$			

Def. Se dice que un polinomio está ordenado en forma *descendente* si cada término que está a la derecha de otro es de menor grado.

3.1.6 ARREGLAR CADA POLINOMIO EN ORDEN DESCENDENTE.

Ejemplos

- $p^8 - 4 + p + p^2 - 7p^4$ $\underline{\quad p^8 - 7p^4 + p^2 + p - 4 \quad}$

1. $x^5 + x + 6x^3 + 1 + 2x^2$ ______________________
2. $5x^3 + 15x^9 + x - x^2 + 7x^8$ ______________________
3. $8y^3 - 7y^2 + 9y^6 - 5y^8 - y^7$ ______________________
4. $3 + 2x^2 - 5x^6 - 2x^3 + 3x$ ______________________
5. $9x - 5 + 6x^3 - 5x^4 + x^5$ ______________________

Def. Si dos o más términos tienen las mismas literales con el mismo exponente y solo difieren en sus coeficientes, se dice que son ***semejantes***. A estos los podemos reducir aplicando la propiedad distributiva. $ax + bx = (a+b)x$.

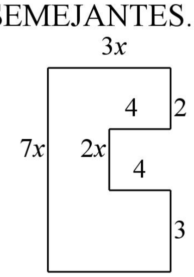
3.1.7 REDUCIR TÉRMINOS SEMEJANTES Y LUEGO ARREGLAR EN ORDEN DESCENDENTE RESPECTO A LA VARIABLE *m*.

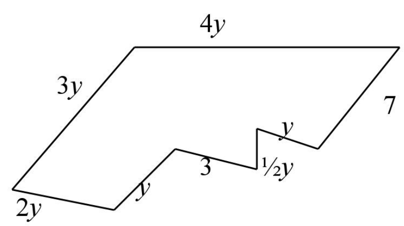
Ejemplos

► $3m^4 - 5m^6 - 2m^4 + 6m^6 = \underline{(6 - 5)m^6 + (3 - 2)m^4 = m^6 + m^4}$

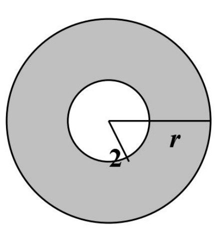
1. $-1 + 5m^3 - 4 - 7m^3 + m^4 + 6$ ______________________________
2. $-3m + 4m^3 - 6m + 9m^3 + 8$ ______________________________
3. $-7m^2 + m - 5m + 8m^2 + 1$ ______________________________
4. $3mp + 2mp + 4mp - m^2 - 4m^2$ ______________________________
5. $-m - 2mp - 3m + m^3p^4 - 5m^3p^4$ _________________________
6. $-m + \frac{3}{4} + 16m^4 - m - \frac{1}{2} - 4m^4$ ____________________________

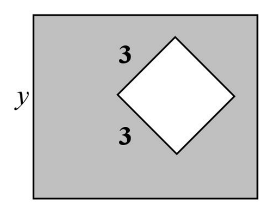
3.1.8 ESCRIBIR UN POLINOMIO PARA EL PERÍMETRO DE ESTAS FIGURAS. SIMPLIFICAR EL POLINOMIO REDUCIENDO TÉRMINOS SEMEJANTES.





3.1.9 EXPRESAR EL ÁREA SOMBREADA EN TÉRMINOS DE UN POLINOMIO.





2. Operaciones con Expresiones Algebraicas

Def. Para ***sumar*** polinomios, combinamos únicamente los términos semejantes presentes en ellos.

Es decir, al sumar dos polinomios, se procede a formar la adición de todos los términos de que constan ambos polinomios; si existen términos semejantes, se reducen.

3.2.1 EFECTÚA LA SUMA DE LOS POLINOMIOS QUE SE INDICAN.

Ejemplos

- $P = 3x^2 - 5x + 3$; $Q = 2x - 7$.
  $P + Q = (3x^2 - 5x + 3) + (2x - 7) = 3x^2 + (-5x + 2x) + (3 - 7)$
  $P + Q = 3x^{2*} - 3x - 4$

1. $3x + 3$; $-4x + 2$
2. $5x^2 + 6x + 2$; $-7x + 1$
3. $m + n - p$; $-m - n + p$
4. $-4x^4 + 6x^2 - 3x - 6$; $6x^3 + 5x + 10$
5. $(7x^3 + 6x^2 - 4x + 5)$; $(-7x^3 + 6x^2 - 4x + 1)$
6. $-3cd^4 + 6d^2 + cd - 1$; $-3d^2 + 3cd + 1$
7. $5a + 3b - 5c - 3$; $-7a + 12c - 7b - 1$
8. $x^4 - 2x^3 + 7x^2 + 11 + 8x$; $-x^3 - 4x - 2x^4 - 7x^2 - 5$
9. $p + q + 2r$; $-2p - 6q + 2r$; $p + 5q - 8r$
10. $-am + 7mn - 4s$; $6s - am - 6mn$; $-2s - 5mn + 3am$
11. $2a + 3b$; $6b - 5c$; $-a + 9c$
12. $a - b$; $b - c$; $c + d$; $a - c$; $c - d$; $d - a$; $a - d$

Def. Para ***restar*** polinomios hay que sumar al minuendo el inverso aditivo del sustraendo.

El mismo resultado se obtiene al suprimir los paréntesis precedidos por signo menos, cambiando el signo de todos los términos del polinomio que está dentro del paréntesis.

3.2.2 EN LOS SIGUIENTES EJERCICIOS, RESTA EL SEGUNDO POLINOMIO DEL PRIMERO.

Ejemplos

- $(-2y^2 + 3y - 7) - (3y^2 - y + 5) = \underline{(-2y^2 + 3y - 7) + (-3y^2 + y - 5) = -2y^2 - 3y^2 + 3y + y - 7 - 5 = -5y^2 + 4y - 12}$

1. $6x^2 + 3y - 7x + 4y - 2$; $\quad 2x^2 - y^2 - 7x + 8$

   ____

2. $a^3 - 6b^2 - c^3$; $\quad 3c^3 + 6b^2 - 2a^3$

   ____

3. $x^2 - 3x + y + 6$; $\quad -12 - 6y + 2x + 2x^2$

   ____

4. $5/6\,x - ¼\,y$; $\quad -7/8\,x - 3/8\,y$

   ____

5. $½\,a + 2/3\,b$; $\quad 1/3\,a - ¼\,b$

   ____

6. $3x - 4xy + 6y - 8$; $\quad -10 - y + 7x + 2xy$

   ____

7. $-7c + 4b + 3a - 4$; $\quad 2b + 5a + 4 - 7c$

   ____

8. $x^3 + 3x^2y - 5xy^2 - 4y^3$; $\quad 2y^3 - 4xy^2 + 2x^3 - 7x^2y$

   ____

9. $x + y + z$; $\quad -x - y - z$

   ____

10. $-5x + y - z$; $\quad 5x + y - z$

   ____

3.2.3 SUSTRAE EL TERCER POLINOMIO DE LA SUMA DE LOS PRIMEROS DOS: (A + B) – C.

1. $A = 4x^3 + 4x^2 - 5x + 1$
   $B = -x^3 + x^2 - 7x + 6$
   $C = 8x^2 + 3x + 3x^3 - 1$

2. $A = 5y^3 - 7y^2 + 7y - 1$
   $B = y^3 - y^2 - 3y + 6$
   $C = 5y^3 + y^2 - 9y + 8$

3. $A = 7a^2 - 6ab + 3b^2 - 9$
   $B = a^2 - ab + b^2 + 4$
   $C = 3a^2 - ab + b^2 + 1$

Def. Para ***multiplicar*** entre sí dos o más monomios, se multiplican primero los coeficientes numéricos y luego se multiplican entre sí las potencias de la misma base de la parte literal, empleando la ley de los exponentes.

3.2.4 MULTIPLICA LOS SIGUIENTES MONOMIOS.

Ejemplos

► $(3a^2b)(8a^3b^2) = [(3)(8)][(a^2)(a^3)][(b)(b^2)] = (24)(a^{2+3})(b^{1+2}) = 24a^5b^3$

1. $2a^3b(6ab^5)=$ ______________________

2. $(-5m^2b)(-4m^3b)=$ ______________________

3. $(-7x)(-3x)(-2x^4)=$ ______________________

4. $2x^3y^2(3x^4y^3)(-4xy)=$ ______________________

5. $(5a^2)(-6a^4b^2)(ab^5)=$ ______________________

6. $(-\frac{1}{2}a^3b)(-1/3\ ab^4)(-2a^2b^5)(-\frac{1}{4}c)=$ ______________________

7. $(-4w^2v)^2 =$ ______________________

Def. Si se desea calcular el ***producto*** de un *monomio por un polinomio* de dos o más términos, se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio.

3.2.5 EFECTÚA LAS MULTIPLICACIONES DE UN MONOMIO POR UN POLINOMIO QUE SE INDICAN.

Ejemplos

► $3x(y^3 + x^2y - y^2 - 5) = \underline{3x(y^3) + 3x(x^2y) + 3x(-y^2) + 3x(-5)}$
$\underline{= 3xy^3 + 3x^3y - 3xy^2 - 15x}$

1. $4y^2(y^3 - 5y^2 + y - 1) =$ ______________________

2. $mn^4(m^3 - 2m^2n + 4mn^2 - n^2 + 4) =$ ______________________

3. $-2a^3b(a^3 - 2a^2b^2 - 6ab^3) =$ ______________________

4. $7x^2(x^4 - 3x^3 - x^2 + 2x - 5) =$ ______________________

5. $-4xy^3(2x^3 - x^2y + xy - 5y^2 - 6) =$ ______________________

6. $4(2a - b + 5c - 1) =$ ______________________

7. $-y^3(4y^2 - 5y + 6) =$ ______________________

8. $-7a^2b(a^3 - 4a^2b^3 - 3b^3 + a - b) =$ ______________________

9. $10\left(\frac{x-3}{5} + \frac{x+1}{2}\right) =$ ______________________

10. $12\left(\frac{2x-1}{4} - \frac{x-3}{3}\right) =$ ______________________

11. $18\left(\frac{x-3}{9} + \frac{x-2}{3}\right) =$ ______________________

12. $16\left(\frac{x-5}{8} - \frac{x+6}{2}\right) =$ ______________________

Def. Para multiplicar dos polinomios, se multiplica cada término de uno por cada uno de los términos del otro y se suman los resultados.

3.2.6 REALIZA LAS SIGUIENTES MULTIPLICACIONES DE POLINOMIOS.

Ejemplos

- (4x - 1) (9x – 2) = 4x(9x – 2) + (-1)(9x – 2) = (36x² – 8x) + (-9x + 2) = 36x² – 17x + 2

1. $(x^2 - 3x + 4)(2x - 5) =$
2. $(2x - 5y)^2 =$
3. $(3x - 1)(2x^2 - 7x - 4) =$
4. $(5x - 2)(6x^2 - 3x + 1) =$
5. $(a - b)(a^2 + ab + b^2) =$
6. $(2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2) =$
7. $(a + b)(a - b) =$
8. $(x + 9)(x - 2) =$
9. $(a^2 + 5)(a^2 - 2a + 3) =$
10. $(3x - 4)(x - 3)(4x + 1) =$

Def. ***Dividir*** dos polinomios significa encontrar un tercer polinomio, que multiplicado por el divisor dé como producto el dividendo.

- Para dividir dos monomios, se realiza el cálculo usual aritmético del cociente, y se determina la parte literal empleando la ley de los signos.
- Para dividir un polinomio entre un monomio, se divide cada término en el polinomio entre el monomio.

3.2.7 EFECTÚA LAS DIVISIONES SIGUIENTES.

Ejemplos

- $\dfrac{-12a^2 + 6ab - 15a^2b^2}{3a}$ = [(-12/3)(a^2/a)] + [(6/3)(ab/a)] + [(-15/3)(a^2b^2/a)] = -4a + 2b – $5ab^2$

1. $\dfrac{9x^7y^5}{3x^3y}$

2. $\dfrac{42a^4b^2c}{-7a^2b^2c^4}$

3. $\dfrac{25a^7b^9c^4d}{-5a^4b^3cd}$

4. $\dfrac{15x^2y^2}{-5x^4y}$

5. $\dfrac{-14a^7b^5c^2d^2}{-7a^3bc^3d^2}$

6. $\dfrac{81x^3y^5}{9xy^6}$

7. $\dfrac{-21x^8yz}{-3x^5y^2z}$

8. $\dfrac{-18x^5y^3}{2x^3y^2}$

9. $\dfrac{9a^2-3a+6}{3a}$

10. $\dfrac{6x^4y^2-4x^3y^3-8x^2y^4}{-2x^2v^2}$

11. $\dfrac{9x^6y^3-6x^4y^2-3x^2y^5}{3x^2v}$

12. $\dfrac{3x^2-9x}{3x}$

3.2.8 DIVIDE LOS SIGUIENTES POLINOMIOS.

Procedimiento

- ✓ Los polinomios se ordenan de forma decreciente.
- ✓ El primer término del cociente se obtiene al dividir el primer término del dividendo entre el primer término del divisor.
- ✓ El término obtenido en el paso anterior, debe multiplicarse por el divisor y restarse este producto del dividendo, la diferencia obtenida es el primer residuo parcial.
- ✓ Para determinar el segundo término del cociente, debe dividirse el primer término del residuo parcial entre el primer término del divisor.
- ✓ El término obtenido en el paso anterior, debe multiplicarse por el divisor y restarse este producto del primer residuo parcial.
- ✓ El proceso se continúa de manera similar y se dará por concluido cuando se obtenga como residuo un polinomio de grado menor que el que le corresponda al divisor.

Ejemplos

► $(2n^3 + 9n^2 + 6n + 8) \div (n + 4) = \underline{\ 2n^2 + n + 2\ }$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2n^2 + n + 2 \\ \hline
n + 4 & 2n^3 + 9n^2 + 6n + 8 \\
 & \underline{-2n^3 - 8n^2} \\
 & n^2 + 6n + 8 \\
 & \underline{-n^2 - 4n} \\
 & 2n + 8 \\
 & \underline{-2n + 8} \\
 & 0
\end{array}
$$

A. $\dfrac{x^2 - 4x - 12}{x + 2} =$

B. $\dfrac{4x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x + 2} =$

C. $(8x^3 + 2x^2y - 8xy^2 - 2y^3) \div (4x^2 - 3xy - y^2) =$

D. $(36x^3 - 73x^2y + 35xy^2) \div (9x^2 - 7xy) =$

E. $(4x^3 + 10x - 5x^2 + 6) \div (4x + 3) =$

3. Productos Notables

Def. Los ***productos notables*** son ciertas reglas empleadas para multiplicar expresiones algebraicas de una manera rápida y segura:

Binomio al cuadrado. El cuadrado de un binomio es igual a la suma del cuadrado del primer término, el doble producto del primero por el segundo, y el cuadrado del segundo. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Binomios conjugados. El producto de dos binomios conjugados es igual al cuadrado del término común menos el cuadrado de cualquiera de los otros términos. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Binomios con término común. El producto de dos binomios que tienen un término común es igual a la suma del cuadrado del término común, la suma de los términos no comunes por el común, y el producto de los términos no comunes. $(a + b)(a + c) = a^2 + (b + c)a + bc$

Binomio al cubo. El cubo de un binomio es igual a la suma del cubo del primer término, el triple producto del cuadrado del primer término por el segundo, el triple producto del primer término por el cuadrado del segundo, y el cubo del segundo término. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Trinomio al cuadrado. El cuadrado de un trinomio es igual a la suma del cuadrado de cada uno de los términos, el doble producto del primer término por el tercero, y el doble producto del segundo término por el tercero.
$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

3.3.1 EFECTÚA LAS SIGUIENTES MULTIPLICACIONES UTILIZANDO LA REGLA DEL PRODUCTO NOTABLE CORRESPONDIENTE.

Ejemplos

- $(a - 5)(a + 5) = \underline{a^2 - (5)^2 = a^2 - 25}$ (binomios conjugados)
- $(x - 3xy^2 + 2y^3)^2 = \underline{x^2 + 9x^2y^2 + 4y^6 - 6x^2y^2 + 4xy^3 - 12xy^5}$ (trinom cuad)

1. $(2b + 7)(2b - 7) =$ ____
2. $(3x + 5)(3x - 5) =$ ____
3. $(7w - 2a)(7w + 2a) =$ ____
4. $(y + 8)(y - 8) =$ ____
5. $(1 - a)(1 + a) =$ ____
6. $(a + 6)^2 =$ ____
7. $(n - 5)^2 =$ ____

8. $(3a + b)^2 =$ ______________________________

9. $(5a - 2b)^2 =$ ______________________________

10. $(1 - a)^2 =$ ______________________________

11. $(7x + 2y)^2 =$ ______________________________

12. $(x + 8)(x + 3) =$ ______________________________

13. $(y + 9)(y - 3) =$ ______________________________

14. $(a - 9)(a + 5) =$ ______________________________

15. $(b - 1)(b - 7) =$ ______________________________

16. $(n + 2)^3 =$ ______________________________

17. $(y - 3)^3 =$ ______________________________

18. $(2x + 3)^3 =$ ______________________________

19. $(3x - 5)^3 =$ ______________________________

20. $(3x - y)^3 =$ ______________________________

21. $(x + y + z)^2 =$ ______________________________

22. $[(5x + 4) + 2][(5x + 4) - 2] =$ ______________________________

4. Factorización

Def. Se dice que una expresión algebraica se ***factoriza***, si se expresa como un producto de factores.

Si todos los términos de un polinomio admiten un factor común, entonces puede expresarse como el producto del factor común y la expresión que resulta de dividir el polinomio entre el factor común.

3.4.1 DETERMINA EL MÁXIMO FACTOR COMÚN DE LOS SIGUIENTES POLINOMIOS Y FACTORÍZALOS.

Procedimiento

El factor común de los términos de un polinomio se obtiene con el máximo común divisor de los coeficientes de los términos, y con las literales comunes de menor exponente.

Ejemplos

- $15n^2m^3 - 60n^3m^2 - 45nm^5 =$ $\underline{15nm^2(nm - 4n^2 - 3m^3)}$

1. $20ab^2 - 15a^3b$ ____________________
2. $m^5 - 2m^2 + 6m$ ____________________
3. $54x^2y^3 - 18xy^2 + 36ax^3y^5$ ____________________
4. $56ax^5 - 14x^2y^2 - 28x^3$ ____________________
5. $x^2 - 8x^3 - 7x^4$ ____________________
6. $35m^2n - 42m^4n^2 + 21m^3n^3$ ____________________
7. $ax + bx$ ____________________
8. $2a - 8b$ ____________________
9. $b^2 + 3b$ ____________________
10. $6xy - 3y^2$ ____________________
11. $a(x + 2) + b(x + 2)$ ____________________
12. $2(y - 3) - y(y - 3)$ ____________________
13. $5x(b - 6) - 4(b - 6)$ ____________________
14. $a(n + 6) + n + 6$ ____________________
15. $x(c + 1) - c - 1$ ____________________

Def. La factorización de una *diferencia de cuadrados* se realiza como el producto de dos binomios conjugados, cuyo término común es la raíz cuadrada del minuendo y los otros términos, la raíz cuadrada del sustraendo de dicha diferencia.

3.4.2 FACTORIZA COMPLETAMENTE LAS SIGUIENTES EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

Ejemplos

- $a^2 - 9 =$ $\underline{(a + 3)(a - 3)}$
- $4x^2(m^2 - n^2) - 9(m^2 - n^2) =$ $\underline{(4x^2 - 9)(m^2 - n^2) = (2x + 3)(2x - 3)(m + n)(m - n)}$

1. $y^2 - 81$ ____________________
2. $b^2 - 1$ ____________________
3. $100 - w^2$ ____________________
4. $4a^2 - 1$ ____________________

5. $ax^2 - 16a$ ______________________________
6. $bx^2 - b$ ______________________________
7. $64z^2 - 81$ ______________________________
8. $4 - 49a^2b^2$ ______________________________
9. $x^2(x + 3) - y^2(x + 3)$ ______________________________
10. $a^2(a^2 - 1) - 9(a^2 - 1)$ ______________________________
11. $a^2(1 - x^2) - b^2(1 - x^2)$ ______________________________
12. $a^3 - a$ ______________________________

Def.

Un trinomio para el que existe un binomio cuyo cuadrado es el trinomio dado, se llama ***trinomio cuadrado perfecto***.

Esto se cumple si uno de los términos de un trinomio es el doble producto de las raíces cuadradas de los otros términos.

3.4.3 VERIFICA CUÁLES DE LOS TRINOMIOS CUADRÁTICOS SIGUIENTES SON PERFECTOS Y FACTORIZA LOS DE ESTE TIPO.

Procedimiento

- ✓ Verificar que el término que es el doble producto de las raíces cuadradas de los otros términos, ocupe el segundo lugar del trinomio.
- ✓ Obtener la raíz cuadrada del primer término.
- ✓ Colocar el signo del segundo.
- ✓ Obtener la raíz cuadrada del tercero.
- ✓ Elevar al cuadrado el binomio resultante.

Ejemplos

- ► $9x^2 - 12xy + 4y^2 =$ <u>$(3x - 2y)^2$</u>
- ► $16m^2 + 8m + n^2$ <u>No es cuadrado perfecto ya que $2(4m)(n) \neq 8m$.</u>

1. $4x^2 - 4xy + y^2$ ______________________________
2. $49x^2 - 42xy + 9y^2$ ______________________________
3. $36a^2 - 30ab + 25b^2$ ______________________________
4. $25a^2 + 40ab + 16b^2$ ______________________________
5. $y^2 - 10y - 25$ ______________________________
6. $n^2 + 18n + 64$ ______________________________
7. $x^2 - 12xy + 36y^2$ ______________________________

8. $9n^2 + 48n + 64m^2$ ____________________
9. $b^2 - 10b + 36$ ____________________
10. $a^2 + 14a + 49$ ____________________
11. $p^2q^4 - 2pq^2r + r^2$ ____________________
12. $16x^2 - 40xy + 25y^2$ ____________________

Def. Se les llama ***trinomio general*** de segundo grado a los que no son cuadrados perfectos. Para factorizar estos trinomios, necesitamos encontrar valores racionales a, b, c y d a partir de los valores conocidos ac, ad + bc, y bd.

$$acx^2 + (ad + bc)xy + bdy^2 = (ax + by)(cx + dy)$$

3.4.4 FACTORIZA LAS SIGUIENTES EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

Procedimiento

- ✓ Encontramos dos términos cuyo producto sea el primer término del trinomio.
- ✓ Cada uno de los términos encontrados, será el primer término de uno de los factores.
- ✓ El producto de los dos términos faltantes será el último término del trinomio, y la suma de sus productos cruzados debe ser igual al segundo término del trinomio.

Ejemplos

► $8x^2 - 2xy - 15y^2 =$ <u>$(2x - 3y)(4x + 5y)$</u>

porque $(2x)(4x) = 8x^2$; $(-3y)(5y) = -15y^2$; y $(2x)(5y) + (-3y)(4x) = -2xy$.

1. $6x^2 - 19x + 3$ ____________________
2. $2y^2 + 3y - 9$ ____________________
3. $2a^2 - 5a + 2$ ____________________
4. $2x^2 + 5x + 3$ ____________________
5. $2x^2 - x - 3$ ____________________
6. $8x^2 - 10x - 3$ ____________________
7. $4x^2 - 8x + 3$ ____________________
8. $3x^2 - x - 10$ ____________________
9. $12y^2 + 11y - 15$ ____________________
10. $3x^2 + 20x + 25$ ____________________

11. $7x^2 - 9x + 2$ ______________________________

12. $6x^2 - 23x - 4$ ______________________________

13. $4x^2 - 20x + 21$ ______________________________

14. $3x^2 - x - 14$ ______________________________

15. $5x^2 - 29x - 6$ ______________________________

Def. Otra forma de factorizar es mediante la *suma y la diferencia de dos cubos*. Multiplicando se verifican las siguientes fórmulas:

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$
$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

3.4.5 FACTORIZA COMPLETAMENTE LAS SIGUIENTES EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

Ejemplos

- $27x^3 + 64y^3 = \underline{(3x)^3 + (4y)^3 = (3x + 4y)(9x^2 - 12xy + 16y^2)}$
- $2x^4y - 54xy^4 = \underline{2xy(x^3 - 27y^3) = 2xy(x - 3y)(x^2 + 3xy + 9y^2)}$

1. $x^3 - 27$ ______________________________
2. $a^3 + 64$ ______________________________
3. $1 - y^3$ ______________________________
4. $n^3 + 125$ ______________________________
5. $8a^3 - 216b^3$ ______________________________
6. $64y^3 - 1$ ______________________________
7. $27 - 125y^6$ ______________________________
8. $8b^6 - 216$ ______________________________

3.4.6 IDENTIFICA LOS PRODUCTOS NOTABLES NECESARIOS PARA FACTORIZAR.

A. $rz - sz$ ______________________________

B. $2z^4 - 32z^2$ ______________________________

C. $(x - 1)^2 - (x - 1)^4$ ______________________________

D. $(t + 3)^2 - u^2$ ______________________________

E. $ax + 2bx - 3ay - 6by$ ______________________________

F. $3ab + 3ax - 2b - 2x$ ______________________________

G. $r^2 + 12r + 36$ ____

H. $a^2 - 8a + 16$ ____

5. Fracciones

Def. Cualquier cociente indicado entre dos polinomios, en donde el dividendo no es el polinomio nulo, se llama ***fracción algebraica***.
Simplificar o reducir una fracción algebraica consiste en obtener otra fracción equivalente más sencilla, en la que el numerador y el denominador no tienen otro factor común más que ± 1.
Para simplificar una fracción algebraica se factorizan su numerador y su denominador, y se eliminan los factores comunes.

3.5.1 SIMPLIFICA LAS SIGUIENTES FRACCIONES ALGEBRAICAS.

1. $\dfrac{40x^2y^5c}{48x^3y^2c}$	7. $\dfrac{x^2 + x - 20}{x^2 - 25}$
2. $\dfrac{-36ab^3c}{60a^3bc^2}$	8. $\dfrac{x^2 - 4}{3x + 6}$
3. $\dfrac{-21xb^5c^3}{-63x^3b^2c^3d}$	9. $\dfrac{x^3 + 27}{x^2 - 3x + 9}$
4. $\dfrac{-a^4b^9}{-2a^{10}b^9c}$	10. $\dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$
5. $\dfrac{2a - 4b}{12b - 6a}$	11. $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 5x + 4}$
6. $\dfrac{4a - 4b}{8b - 8a}$	12. $\dfrac{nx + ny + mx + my}{n^2 - m^2}$

Def. La ***multiplicación*** de *fracciones algebraicas* es otra fracción cuyo numerador se obtiene multiplicando los numeradores de las fracciones, y su denominador multiplicando los denominadores.

3.5.2 EFECTÚA LAS SIGUIENTES MULTIPLICACIONES DE FRACCIONES ALGEBRAICAS Y SIMPLIFICA EL RESULTADO.

Procedimiento

Para reducir el producto a términos mínimos, es recomendable escribir cada fracción en la forma factorizada. Factores comunes del numerador y del denominador pueden entonces ser fácilmente removidos por división.

Ejemplos

► $$\frac{2x^2 - x - 3}{x^2 - 1} \bullet \frac{x^2 - 2x + 1}{3x^2 - x - 2} = \frac{(2x - 3)(x + 1)}{(x + 1)(x - 1)} \bullet \frac{(x - 1)(x - 1)}{(x - 1)(3x + 2)} = \frac{2x - 3}{3x + 2}$$

1. $$\frac{2x + 4}{x + y} \bullet \frac{x^2 - y^2}{4x + 8} =$$

2. $$\frac{y^2 + 8y + 15}{y^2 - 25} \bullet \frac{4y - 20}{y^3 + 3y} =$$

3. $$\frac{7a + 7b}{14\,a^2} \bullet \frac{a^2 - ab}{a^2 - b^2} =$$

4. $$\frac{m^3 + m^2n}{mn - m^2} \bullet \frac{m^3 - m^2n}{m^3n + m^4} =$$

5. $$\frac{y^2 - 9y + 20}{25 - y^2} \bullet \frac{y^2 + 5y}{y^2 - 4y} =$$

6. $$\frac{x^3 + 64}{x^2 - 16} \bullet \frac{a^2 - ab}{x^3 - 4x^2 + 16x} =$$

Def. La ***división*** de *fracciones algebraicas* se reduce a una multiplicación. Al igual que con las fracciones comunes, para dividir una fracción entre otra se multiplica la fracción dividendo por el recíproco de la fracción divisor.

3.5.3 EFECTÚA LAS SIGUIENTES DIVISIONES DE FRACCIONES ALGEBRAICAS Y SIMPLIFICA EL RESULTADO.

Ejemplos

► $$\frac{a^3-1}{a^2-9} \div \frac{a^2+a+1}{a^2-2a-3} = \frac{a^3-1}{a^2-9} \bullet \frac{a^2-2a-3}{a^2+a+1} = \frac{(a-1)(a^2+a+1)(a+1)(a-3)}{(a+3)(a-3)(a^2+a+1)}$$

$$= \frac{(a-1)(a+1)}{a+3}$$

1. $\frac{2y-14}{y^2-2y-35} \div \frac{6y-30}{y^2-25} =$

2. $\frac{9x-27}{15x+30} \div \frac{6x^2-18x}{14-7x} =$

3. $\frac{x^2+7x+10}{x^2+5x} \div \frac{x^2-4}{2x} =$

4. $\frac{a^2+6a+8}{a^2+4a} \div \frac{4-a^2}{2a} =$

5. $\frac{b^2-2b-8}{4b-b^2} \div \frac{4-b^2}{5b-10} =$

6. $\frac{x^3+8}{x^2-4} \div \frac{x^3-2x^2+4x}{2a-ax} =$

7. $\frac{x^2-4x-21}{x^3+27} \div \frac{7x-x^2}{x^3y-3x^2y+9xy} =$

Def. Un polinomio que es exactamente divisible entre dos o más polinomios es llamado un *múltiplo común* de dichos polinomios. El menor de los múltiplos comunes para esos polinomios es llamado el ***mínimo común múltiplo***.

3.5.4 ENCUENTRA EL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO DE LOS SIGUIENTES POLINOMIOS.

Procedimiento

El *mínimo común múltiplo* de varios términos consiste en el mínimo común múltiplo de los coeficientes de los mismos, las literales comunes de mayor exponente y las literales no comunes con su respectivo exponente.

De manera semejante se obtiene el mínimo común múltiplo de varias expresiones algebraicas:

- ✓ se factorizan las expresiones.
- ✓ se obtiene el mínimo común múltiplo de los coeficientes.
- ✓ se toman las expresiones comunes de mayor exponente.

Ejemplos

- ► M. C. M. De $12x^2y^3$, $6x^4y$, $3xy^4m$: $\underline{12x^4y^4m}$
- ► M. C. M. De $6x^2 + 3x - 3$, $7x^2 - 14x + 7$, $12x^2 - 12$:

$6x^2 + 3x - 3 = 3(2x^2 + x - 1) = 3(2x - 1)(x + 1)$
$7x^2 - 14x + 7 = 7(x^2 - 2x + 1) = 7(x - 1)^2$
$12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1) = 2^2 \bullet 3(x + 1)(x - 1)$

m.c.m = $\underline{2^2\bullet 3\bullet 7(2x - 1)(x + 1)(x - 1)^2 = 84(2x - 1)(x + 1)(x - 1)^2}$

A. $4m^2nx$; $2mn^5$; $3xy$	D. $a^2 - 4$; $4a^2 - 8a$; $3a^2 + 6a$
B. $15pqr$; $5p^2$; $3rs$	E. $9a^2 - 1$; $6a^3 - 2a^2$, $9a + 3$
C. $20xy^3$; $10y^4$; $15x^6y^8z^4$	F. $3x^2 + 5xy - 2y^2$, $2x^2 + 5xy + 2y^2$; $6x^2 + xy - y^2$

Def. La ***suma*** de *fracciones algebraicas* de igual denominador da como resultado otra fracción del mismo denominador, cuyo numerador es la suma de los numeradores de las fracciones.
En la ***resta*** de dos fracciones de igual denominador el resultado es otra fracción del mismo denominador, cuyo numerador es la resta de los numeradores de las fracciones.

3.5.5 EFECTÚA LAS OPERACIONES QUE SE INDICAN Y SIMPLIFICA EL RESULTADO.

Procedimiento

✓ Para sumar fracciones algebraicas con diferente denominador se realizan los pasos siguientes:
1. Se obtiene el mínimo común múltiplo de los denominadores.
2. Se convierten las fracciones dadas a un denominador común. Este será el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones. Los numeradores de las nuevas fracciones se obtienen al dividir el denominador común entre cada denominador y multiplicando el cociente resultante por el numerador de la fracción dada.
3. Se suman las fracciones de igual denominador obtenidas.

✓ Para restar dos fracciones algebraicas con diferente denominador, se convierten las fracciones para que tengan un denominador común y se restan las nuevas fracciones obtenidas.

Ejemplos

$$\frac{12x^2}{9x^2-1}+\frac{2x}{3x-1}+\frac{3x}{3x+1}=\frac{12x^2}{(3x+1)(3x-1)}+\frac{2x}{3x-1}+\frac{3x}{3x+1}$$
$$=\frac{12x^2-2x(3x+1)-3x(3x-1)}{(3x+1)(3x-1)}=\frac{12x^2-6x^2-2x-9x^2+3x}{(3x+1)(3x-1)}$$
$$=\frac{-x(3x-1)}{(3x+1)(3x-1)}=\frac{-x}{3x+1}$$

1. $\dfrac{5}{x}+\dfrac{7}{x^2}=$

2. $\dfrac{2x}{x^2-16}+\dfrac{8}{x^2-16}=$

3. $\dfrac{6n}{n-5}-\dfrac{30}{n-5}=$

4. $\dfrac{9b-5}{b-1}-\dfrac{7b-3}{b-1}=$

5. $\dfrac{10}{a-5} + \dfrac{2a}{5-a} =$

6. $\dfrac{ax}{x-y} - \dfrac{ay}{x-y} =$

7. $\dfrac{3}{5x} - \dfrac{8}{3x} =$

8. $\dfrac{2y-5}{7} + \dfrac{y-2}{2} =$

9. $\dfrac{4x-3}{8} - \dfrac{2x-7}{4} =$

10. $\dfrac{7}{x} + \dfrac{2}{x+2} =$

11. $\dfrac{2x-1}{4-x} - \dfrac{x+2}{3x-12} =$

12. $\dfrac{a+3}{a^2+1} + 2a - 4 =$

13. $\dfrac{2x}{x-5} + \dfrac{5}{x-2} =$

14. $\dfrac{x+2}{x-3} + \dfrac{x-2}{3-x} =$

3.5.6 RESUELVE LOS SIGUIENTES PROBLEMAS UTILIZANDO ECUACIONES RACIONALES COMO MODELOS MATEMÁTICOS.

1. Mario puede pintar una casa en 3 días y Julio la puede pintar en 6 días. ¿Cuánto tiempo tardarían en realizar dicho trabajo los dos juntos?

2. Un depósito de agua puede ser llenado por una llave en 10 horas y vaciado por otra en 15 horas. ¿En cuánto tiempo se llenará dicho depósito si ambas llaves se abren al mismo tiempo?

3. Un jardinero puede podar un patio en 4 días y otro en 3 días. ¿Cuánto tiempo tardarán en realizar el trabajo si trabajan juntos?

4. Andrés puede efectuar un trabajo en 20 minutos. Si trabaja junto con Rodolfo podrían tardar 12 minutos. ¿En cuánto tiempo puede realizar el trabajo Rodolfo?

5. Una cisterna tiene dos tubos de alimentación. Uno la llena en cuatro horas y otro en seis horas. Si al estar llena la cisterna el tubo de desagüe la vacía en tres horas. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse la alberca si están abiertos los dos tubos y el desagüe?

Def. Una ***fracción compleja*** es aquella que contiene una fracción en el numerador, en el denominador o en ambos.
Simplificar una fracción compleja equivale a expresar ésta como una fracción equivalente que no tiene fracciones en el numerador ni en el denominador.

3.5.7 SIMPLIFICA LAS FRACCIONES COMPLEJAS.

Procedimiento

Podemos llevar a cabo la simplificación por uno de los siguientes métodos:

- ✓ Reducir el numerador y denominador a fracciones simples y luego se dividen.
- ✓ Multiplicar el numerador y el denominador de la fracción principal por una expresión tal que el numerador y denominador de la nueva fracción sean no fraccionarios.

Ejemplos

► $$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\frac{\frac{b+a}{ab}}{\frac{b-a}{ab}}=\frac{b+a}{ab}\bullet\frac{ab}{b-a}=\frac{b+a}{b-a}$$

1. $$\frac{\frac{1}{2}-\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{10}}$$

2. $$\frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{2}}{\frac{2}{x}-\frac{1}{2}}$$

3. $$\frac{\frac{3}{x}-1}{\frac{3}{x}+1}$$

4. $$\frac{\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{5}{x+1}}$$

5. $$\frac{\frac{1}{2x-1}-\frac{2}{3x-1}}{\frac{1}{2x-1}+\frac{1}{3x-1}}$$

6. $$\frac{3-\frac{x-6}{x^2-6x+8}}{2+\frac{x+7}{x^2-2x-8}}$$

7. $$\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{y}}}$$

8. $$\frac{m}{x-\frac{m}{2-\frac{1}{m}}}$$

Unidad Temática 4

RELACIONES Y FUNCIONES

1. Par Ordenado y Producto Cartesiano

Def. Se entiende por ***par ordenado*** y se representa por (a, b) a la disposición de dos elementos en un *orden*, de forma que uno de ellos sea el primer elemento y el otro el segundo, y si se cambian de lugar, el sentido varía. En consecuencia, no es lo mismo el par ordenado (a, b) que el par (b, a).

4.1.1 ESCRIBE LAS PAREJAS ORDENADAS QUE REPRESENTEN CADA UNA DE LAS SIGUIENTES SITUACIONES.

Ejemplos

- ▶ Las parejas ordenadas en las que a cada entero positivo menor que 10 se le asocia el residuo que se obtiene al dividirlo entre 2.
  (1, 1), (2, 0), (3, 1), (4, 0), (5, 1), (6, 0), (7, 1), (8, 0), (9, 1).
- ▶ Dada la ecuación 3x-5, obtener parejas ordenadas.
  (- 3, - 14), (- 2, - 11), (- 1, - 8), (0, - 5), (1, - 2), (2, 1), (3, 4), etc.

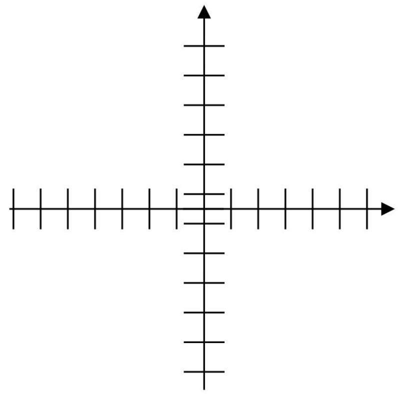
1. En un auditorio pequeño hay cinco hileras de sillas numeradas del 1 al 5, cada hilera tiene diez sillas numeradas del 1 al 10. Escribe las parejas ordenadas (hilera, silla) para las hileras impares y sillas pares.

2. Francisco vende botines a $600 el par. Escribe las parejas ordenadas que indican el número de botines vendidos y lo que el Francisco recibe, cuando sus ventas han sido de 2, 5, 3 y 0 pares de botines al día.

3. Una casa de préstamos entrega $9 000 para pagar $900 mensuales. Escribe las parejas ordenadas cuyas componentes son: (número de pago, cantidad que se adeuda).

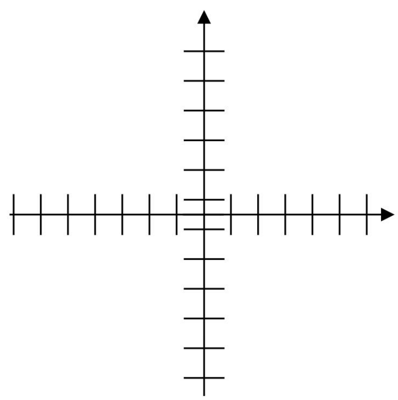
4. Con base en la función $f(x)=x^2$ obtener parejas ordenadas y graficar.

x	f(x)



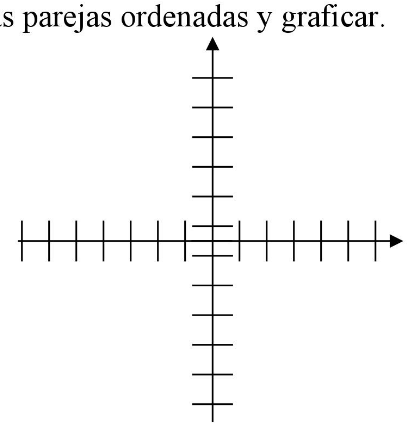
5. Obtener parejas ordenadas y graficar la función $y = x^2 - 2x + 1$.

x	y



6. Con base en la función $y = x / 2$, obtener las parejas ordenadas y graficar.

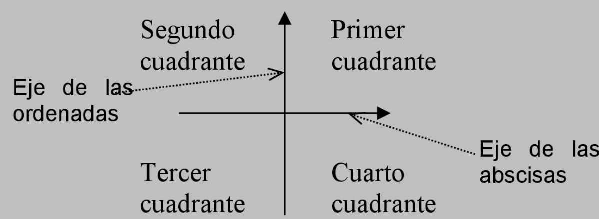
x	y



Def.

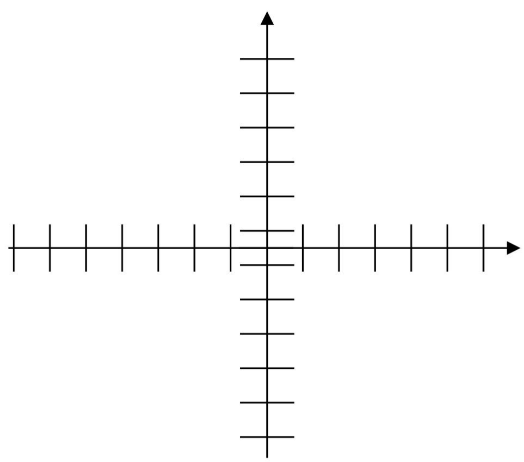
Para facilitar la representación de pares ordenados y del producto cartesiano de dos conjuntos, es conveniente utilizar un sistema de dos rectas perpendiculares llamadas ***ejes coordenados***, a lo largo de los cuales se representan los elementos de los conjuntos (las parejas ordenadas).

A los elementos que ocupan el primer lugar en la pareja ordenada se les llama ***abscisas***, y a los elementos que ocupan el segundo lugar en la pareja se les llama ***ordenadas***.



4.1.2 EN UN SISTEMA DE EJES COORDENADO UBICA LOS SIGUIENTES PUNTOS:

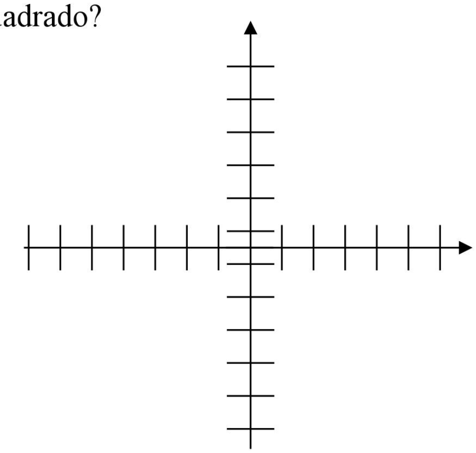
$P_1 = (3, 4)$,
$P_2 = (-2, -5)$,
$P_3 = (-4, 6)$,
$P_4 = (5, -6)$,
$P_5 = (0, 7)$,
$P_6 = (-6, 0)$,
$P_7 = (6, 0)$,
$P_8 = (0, -4)$.



4.1.3 ESCRIBE LAS COORDENADAS DE CADA PUNTO DESCRITO Y LOCALÍZALOS EN EL PLANO:

1. Punto cuya ordenada es 5 y su abscisa es –2.
2. Un punto cuya ordenada es el triple de su abscisa y su abscisa es 2.
3. Tiene abscisa 3 y su ordenada es 2 unidades menor que la abscisa.
4. La abscisa del punto es –3 y se encuentra sobre el eje *x*.
5. El punto tiene ordenada 1 y su abscisa es 4 unidades menor que ella.

6. Un cuadrado mide 3 unidades de lado. Uno de sus vértices está en el origen, otro sobre el semieje positivo de las abscisas y otro sobre el semieje positivo de las ordenadas. ¿Cuáles son las coordenadas de los cuatro puntos que son vértices del cuadrado?



P_1 = ______________

P_2 = ______________

P_3 = ______________

P_4 = ______________

P_5 = ______________

Cuadrado: V_1 = ________ ; V_2 = ________ ; V_3 = ________ ; V_4 = ________.

4.1.4 ESCRIBE LAS CONDICIONES PARA QUE UN PUNTO (x, y):

1. Se encuentre en el primer cuadrante

   ____

2. Se encuentre en el segundo cuadrante

   ____

3. Se encuentre en el tercer cuadrante

   ____

4. Se encuentre en el cuarto cuadrante

   ____

5. Si el punto está ubicado sobre el eje y, ¿qué valor tiene su abscisa?

   ____

6. Si el punto está ubicado sobre el eje x, ¿qué valor tiene su ordenada?

   ____

7. Escribe las coordenadas del origen ________________________________

Def.

Dados dos conjuntos A y B, se llama ***producto cartesiano*** de los dos conjuntos, y se representa mediante A x B, al conjunto formado por *todos* los *pares ordenados* posibles que pueden formarse tomando el primer elemento del conjunto A y el segundo elemento de B.

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

4.1.5 ENCUENTRA EL PRODUCTO CARTESIANO EN LOS SIGUIENTES EJERCICIOS.

Ejemplos

Dados los conjuntos A = {1, 2, 3} y B = {a, b}

- A x B = {(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)}
- B x A = {(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)}

1. Sea el conjunto A = {rojo, azul, verde} y B = {amarillo, café, morado}, encuentre A x B.

____

____

2. Si M = $\{x, y, z\}$ y N = $\{x^2, z^2, y^2\}$ encuentre M x N.

____

3. Si S = {1,2,3} y T = {a, c},encontrar S X T.

____

4. Sean M = {q, r, s, t} y N ={a, b, c}.Hallar M X N Y N X M.

____

____

5. Si A = {1, 2, 3, 4} y B = {5, 6}, decir si son falsas o verdaderas las siguientes afirmaciones.
   a) $(2,4) \in AXB$ ________________
   b) $(3,3) \in AXB$ ________________
   c) $(6,3) \in BXA$ ________________
6. Obtener el producto cartesiano A x B si A = {1, 2, 3} y B = {c, t}.

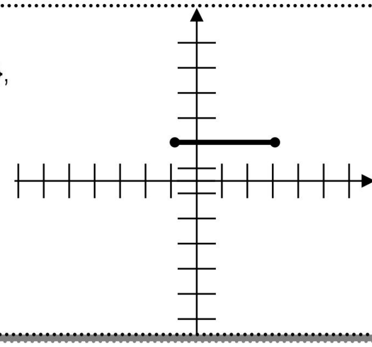
____

4.1.6 EN CADA UNO DE LOS SIGUIENTES EJERCICIOS ENCUENTRA EL PRODUCTO CARTESIANO QUE SE INDICA Y REPRESÉNTALO GEOMÉTRICAMENTE EN UN SISTEMA DE EJES COORDENADOS.

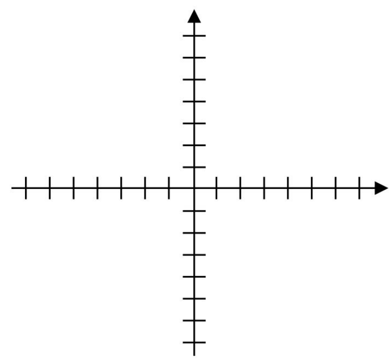
Ejemplos

- Si A = {x $\in$ **R** | - 1 $\leq$ x $\leq$ 3 } y B = { 2 },
  A x B = { (x, 2) | - 1 $\leq$ x $\leq$ 3, x $\in$ **R**}

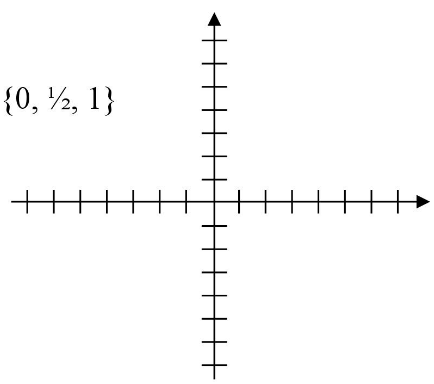
Es decir, A x B es un conjunto de un número infinito de parejas ordenadas cuya primera componente es un número real comprendido desde – 1 hasta 3 y cuyo segundo componente es siempre igual a 2.



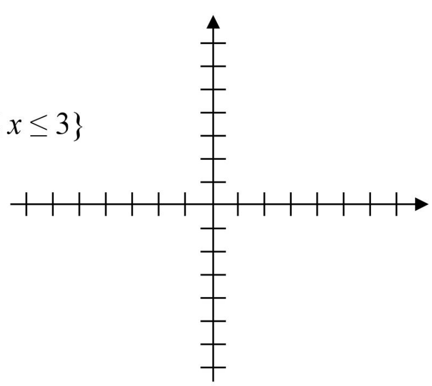
1. S x T, si S = {-4, -2, 0, 2} y T = {-3, -1, 1}



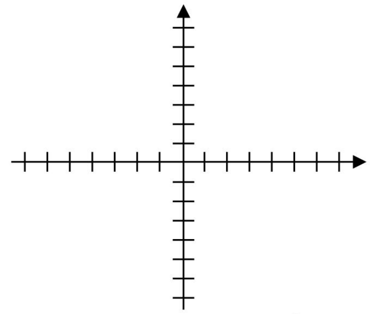
2. M x M. Si M = {0, ½, 1}



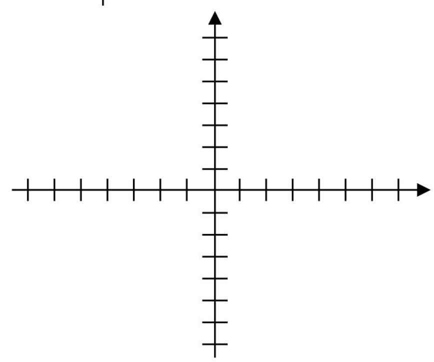
3. A x B, si A = {-2, 4} y B = {$x \in$ **R** |-1 $\leq x \leq$ 3}



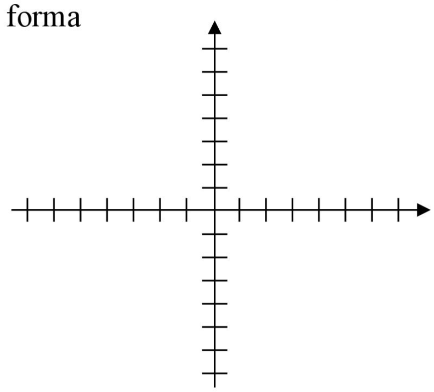
4. C x **R**, si C = { $x \in$ **R** | $4 \leq x \leq 6$}



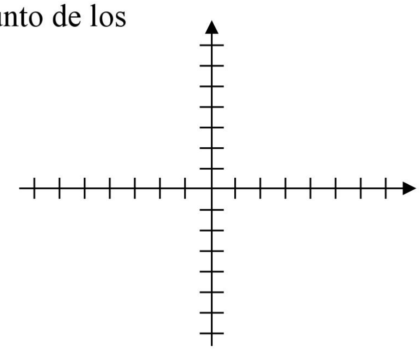
5. **N** x **Z**, donde **N** = { 0, 1, 2, 3, …} y **Z** el conjunto de los números enteros.



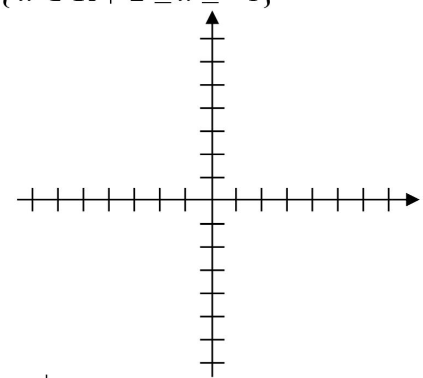
6. **Z** x **N**, con **Z** y **N** definidos de la misma forma que el ejercicio anterior



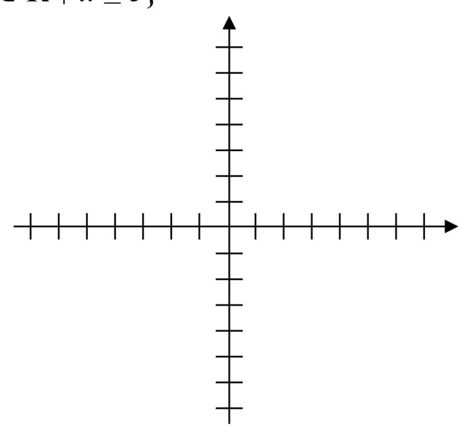
7. A x **N**, si A = { $x \in$ **R** | $x \geq -1$} y **N**, el conjunto de los números naturales.



8. M x N, si M = $\{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x \leq 4\}$ y N = $\{x \in \mathbf{R} \mid -2 \leq x \leq -1\}$



9. S x T, si S = $\{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 2\}$ y T = $\{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 5\}$



4.1.7 SELECCIONA LA RESPUESTA CORRECTA.

1. Una moto avanza con una velocidad uniforme de 45 km/h, las parejas ordenadas formadas por las primeras cuatro horas y la distancia recorrida son:

   a) (1, 45), (2, 90), (3, 135), (4, 180)
   b) (1,0), (2, 45), (3, 90), (4, 135)
   c) (45,1), (90,2), (135, 3), (180, 4)
   d) (0,1), (45,2), (90,3), (135, 4)

2. En una caseta, el costo de una llamada telefónica local es de \$3.00 por los primeros 10 minutos y \$0.35 por cada minuto adicional. Las parejas ordenadas que asocian el costo de la llamada a 12, 14, 15, 17 y 19 minutos de duración de la llamada son:

   a) (3.70, 12), (4.40, 14), (4.75, 15), (5.45, 17), (6.15, 19)
   b) (12, 3.70), (14, 4.40), (15, 4.75), (17, 5.45), (19, 6.15)
   c) (3.70, 12), (4.05, 14), (4.40, 15), (4.75, 17), (5.10, 19)
   d) (12, 3.70), (14, 4.05), (15, 4.40), (17, 4.75), (19, 5.10)

3. Las parejas ordenadas cuyo primer componente es un número par entre 0 y 8, y cuyo segundo componente es un número primo menor que el primer componente que le corresponde son:

   a) (2,1), (4,1), (4,3), (6,1), (6,3), (6,5)
   b) (2,1), (2,2), (4,1), (4,2), (4,3), (6,1), (6,2), (6,3), (6,5)
   c) (2,2), (4,2), (4,3), (6,2), (6,3), (6,5)
   d) (4,2), (4,3), (6,2), (6,3), (6,5)

4. Si S ={1,4,9} y T = {-2, 1}, el producto cartesiano S x T es el conjunto:

   a) { (-2, 1), (-2, 4), (-2, 9), (1, 1), (1, 4), (1, 9) }
   b) { (1, -2), (1, 1), (4, -2), (4, 1), (9, -2), (9, 1) }
   c) { (1, -2), (1, 1), (4, -2), (1, 4), (9, -2), (1, 9) }
   d) { (1, -2), (4, -2), (9, -2), (1, 1), (1, 4), (1, 9) }

5. Si $A = \{ x \in \mathbf{Z} \mid -1 \leq x < 2\}$ y M = {0, 1} el producto cartesiano A x M es:

   a) { (0, -1), (1, -1), (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1) }
   b) { (0, -1), (1, -1), (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1), (0, 2), (1, 2) }
   c) { (-1, 0), (-1, 1), (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) }
   d) { (-1, 0), (-1, 1), (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2,0), (2, 1) }

6. El producto cartesiano M x N, si $M = \{ x \in \mathbf{R} \mid -1 < x \leq 2\}$ y N = {-1} es:

   a) $\{(x, -1) \mid -1 \leq x \leq 2\}$
   b) $\{(-1, x) \mid -1 \leq x \leq 2\}$
   c) $\{(x, -1) \mid -1 < x \leq 2\}$
   d) $\{(-1, x) \mid -1 < x \leq 2\}$

7. El producto cartesiano **Z** x **Z** está contenido en el conjunto:

    a) **N** x **N**
    b) $\mathbf{Z}^-$ x $\mathbf{Z}^+$
    c) $\mathbf{R}^+$ x $\mathbf{R}^-$
    d) **R** x **R**

8. Sea S ={-3, -2, -1, 0, 1}. El producto cartesiano S x T es igual al producto cartesiano T x S si y solo si T es el conjunto:

    a) $\{x \in \mathbf{R} \mid -3 \leq x \leq 1\}$
    b) $\{x \in \mathbf{Z} \mid -3 < x < 1\}$
    c) $\{x \in \mathbf{R} \mid -4 < x < 1\}$
    d) $\{x \in \mathbf{Z} \mid -4 < x < 2\}$

9. La representación geométrica del producto cartesiano $\mathbf{Z}^-$ x $\mathbf{Z}^-$ es un conjunto de puntos del plano coordenado ubicados en el:

    a) Primer cuadrante
    b) Segundo cuadrante
    c) Tercer cuadrante
    d) Cuarto cuadrante

10. El producto cartesiano A x **R,** si A ={0} está representado geométricamente por el:

    a) Eje de las ordenadas
    b) Eje de las abscisas
    c) Origen
    d) Plano coordenado

2. Relaciones y Funciones

Def. Sean A y B dos conjuntos. Se llama ***relación*** de A en B a un subconjunto R de A x B, simbolizado por R: A $\rightarrow$B.
Todos los primeros componentes de las parejas ordenadas conforman el ***dominio*** de la relación, mientras que de los elementos del *codominio*, algunos, o todos, aparecen como segundos componentes. Es decir, el dominio de una relación es un subconjunto de A, y el codominio es igual a B.
Los elementos que aparecen como segundos componentes en una relación forman la ***imagen*** de la relación y es un subconjunto de B.

4.2.1 ESCRIBE LAS RELACIONES CORRESPONDIENTES.

Ejemplos

Dados los conjuntos A = {1, 2, 3} y B = {2, 4, 6}. Encontrar:

- R: A→B, Relación: "es la mitad de". {(1,2), (2, 4), (3, 6)}.
- R: B→A, R ={(x,y)| x es divisible entre y}. {(2, 1), (2, 2), (4, 1), (4, 2), (6, 1), (6, 2), (6, 3)}.

1. Sea R: M→M, donde M = {México, Guatemala, Italia, Estados Unidos, América, Europa}. Encuentre, mediante una lista de sus elementos, las siguientes relaciones:

   a) Es un país del continente ...

   ____
   ____

   b) Es continente menor que el continente...

   ____
   ____

   c) Es país menor que el país...

   ____
   ____

   d) Es un continente que no contiene al país ...

   ____
   ____

   e) Es país que colinda con ...

   ____
   ____

   f) Es mayor que ...

   ____

2. Encuentra tres parejas ordenadas que pertenezcan a la relación "ocurrió antes que" definida de C en C, donde C = {Descubrimiento de América, Independencia de México, Porfiriato}

   ____
   ____

3. Sea M ={2, 4, 6, 8, 10} y R: M→M definida como R = $\{(x, y) \mid x < y\}$

   ____
   ____

4.2.2 PARA CADA RELACIÓN ESCRIBA EL CONJUNTO DE LAS PAREJAS ORDENADAS QUE LA FORMAN Y ENCUENTRE SU DOMINIO E IMAGEN.

Ejemplos

► La relación que asocia al conjunto K, su cuadrado. K = {1, 2, 3}.

{(1, 1), (2, 4), (3, 9)}. D_R = { 1, 2, 3}; I_R = {1, 4, 9}.

1. La relación de dos enteros no negativos cuya suma es 8.

   ____

   ____

2. La relación que a cada número natural menor que 10, que sea cuadrado perfecto, le asocie sus dos raíces cuadradas.

   ____

   ____

3. La relación que asocie a cada número entero mayor o igual a –4 y menor o igual que 3 el doble de su valor absoluto.

   ____

   ____

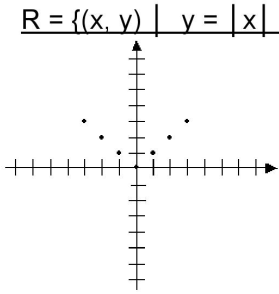
Def. Una relación puede expresarse listando todos sus elementos o bien, enunciando la propiedad que los caracteriza. A esta proposición se le llama ***regla de correspondencia***.
Una relación puede representarse geométricamente con diagramas de Venn o en un sistema de ejes coordenados.
La *gráfica* de una relación R: A→B es el conjunto G de todos los puntos del plano que representan a las parejas ordenadas del producto cartesiano A x B.

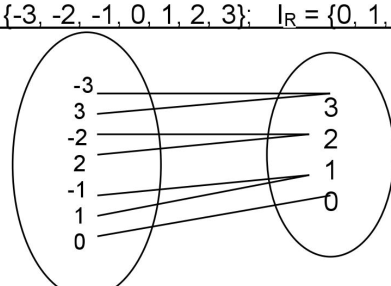
4.2.3 PARA CADA RELACIÓN DA UNA FÓRMULA QUE EXPRESE SU REGLA DE CORRESPONDENCIA Y ENCUENTRA SU DOMINIO, SU IMAGEN Y SU REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA.

Ejemplos

► R = {(-3, 3), (-2, 2), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)}

R = {(x, y) | y = |x| }; D_R = {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}; I_R = {0, 1, 2, 3}.



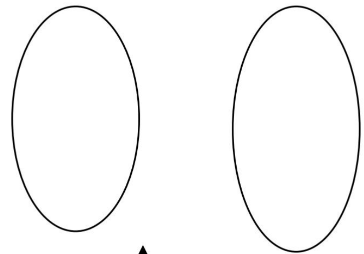


A) Escribe una frase que describa la relación: R = {(B. Juárez, México), (Kennedy, Estados Unidos), (Perón, Argentina)}

R = ______________________________

D_R = ______________________________

I_R = ______________________________

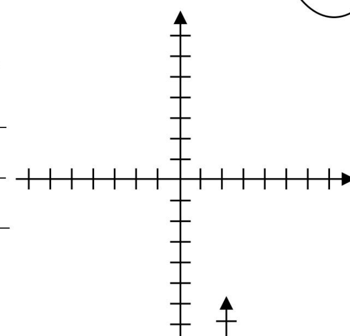


B) R_1 = { (1,3), (2,6), (3,9), (4,12), (5, 15) }

R_1 = ______________________________

D_{R1} = ______________________________

I_{R1} = ______________________________

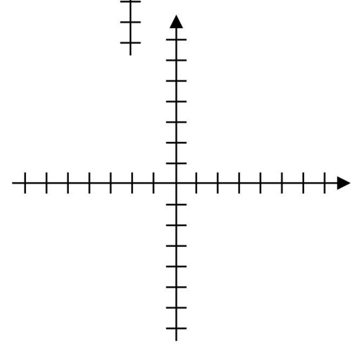


C) R_2 = { (4,2), (8,4), (12,6), (16,8) }

R_2 = ______________________________

D_{R2} = ______________________________

I_{R2} = ______________________________

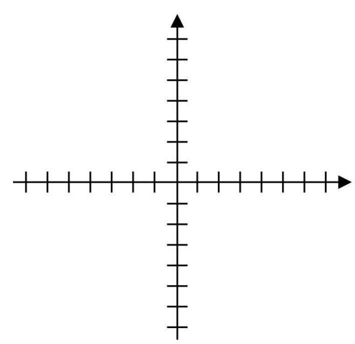


D) R_3 = { (4,3), (6,5), (8,7) }

R_3 = ______________________________

D_{R3} = ______________________________

I_{R3} = ______________________________

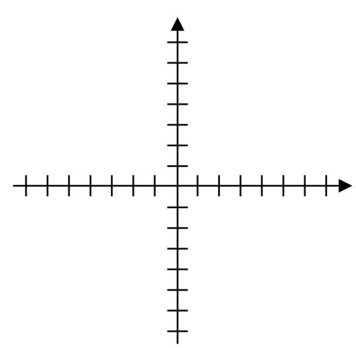


E) R_4 = { (2,4), (-2,4), (3,9), (-3,9) }

R_4 = ______________________________

D_{R4} = ______________________________

I_{R4} = ______________________________

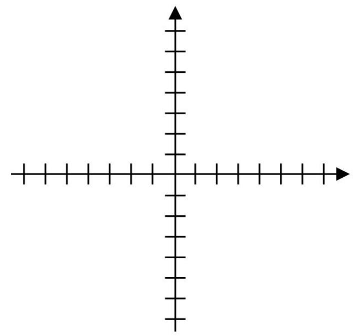


F) $R_5 = \{ (1,1), (2,2), (-1,1), (-2,2) \}$

$R_5 =$ ______________________________

$D_{R5} =$ ______________________________

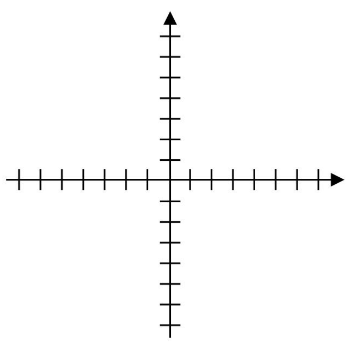
$I_{R5} =$ ______________________________



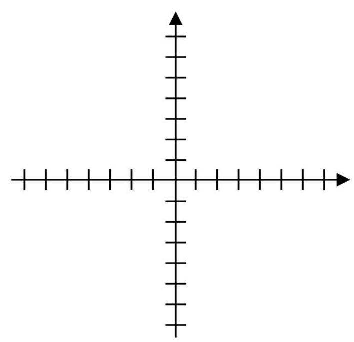
4.2.4 SEA C ={1, 2, 3, 4, 5, 6}, ENCUENTRA EL CONJUNTO Y SU REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA PARA CADA UNA DE LAS SIGUIENTES RELACIONES.

1. R: $C \rightarrow C$, $R = \{(x, y) \mid y = x\}$ R = ______________________________
2. R: $C \rightarrow C$, $R = \{(x, y) \mid y < x\}$ R = ______________________________
3. R: $C \rightarrow \mathbf{R}$, $R = \{(x, y) \mid x = 1, -1 \leq y \leq 2\}$ R = ______________________
4. R: $C \rightarrow \mathbf{R}$, $R = \{(x, y) \mid 4 \leq x \leq 6, y = -3\}$ R = ______________________
5. R: $C \rightarrow \mathbf{R}$, $R = \{(x, y) \mid x < 5, y < x + 1\}$ R = ______________________

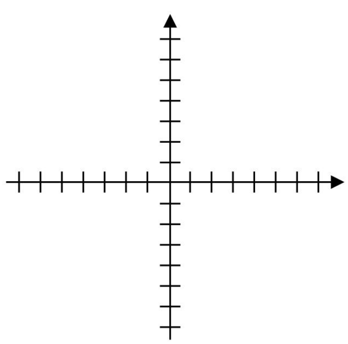
1.



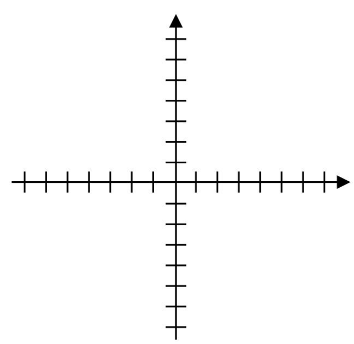
2.



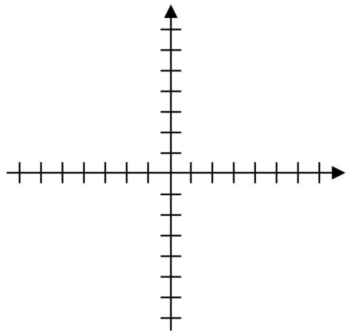
3.



4.



5.



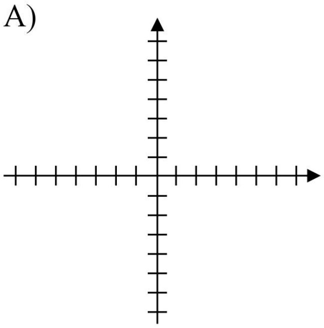
4.2.5 ENCUENTRA LA IMAGEN Y REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LA RELACIÓN DEFINIDA POR:

A) R: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $y = x^2 - x$ $\qquad I_R =$ ______________________________

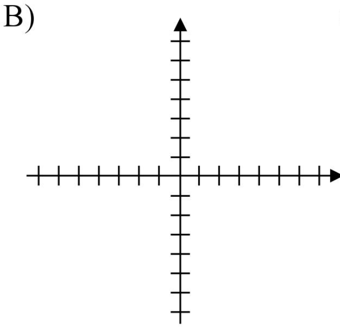
B) R: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $y = x^2 - |x|$ $\qquad I_R =$ ______________________________

C) R: $\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$, $x + y < 2$ $\qquad I_R =$ ______________________________

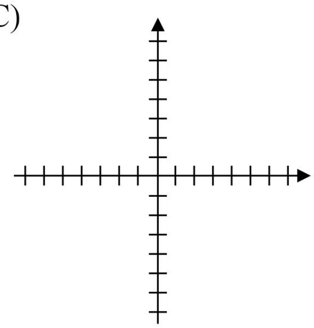
A)



B)

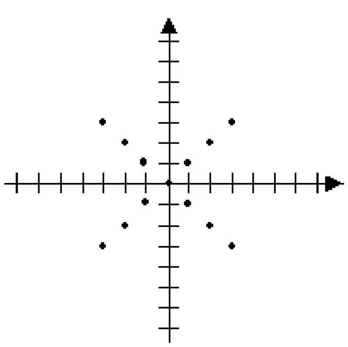


C)



4.2.6 ENCUENTRA, POR MEDIO DE UNA LISTA DE SUS ELEMENTOS, LA RELACIÓN QUE APARECE EN LA FIGURA Y DETERMINA SU DOMINIO E IMAGEN.

A.

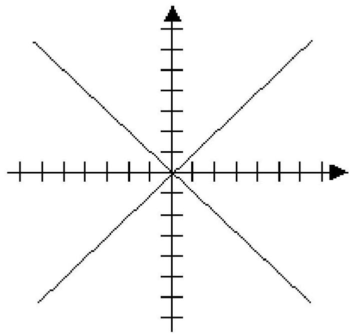


R = ______________________________

$D_R =$ ______________________________

$I_R =$ ______________________________

B.



R = ______________________________

D_R = ______________________________

I_R = ______________________________

Def. Sean A y B dos conjuntos. Una ***función*** f: A→B es un conjunto f de parejas ordenadas de A x B, es decir, una relación especial con la propiedad de que cada elemento de A es primer componente de solamente una pareja ordenada, y para todo a ∈ A, si (a, b) y (a, c) pertenecen a f, entonces b = c.
El conjunto A de los elementos que son primeros componentes en las parejas ordenadas de una función se llama *dominio* de la función, el conjunto B se llama *codominio*. Al elemento de B que le corresponde a *a* ∈ A se llama *imagen* de a y se denota por f(a) (se lee "f de a"), al conjunto de éstos elementos se le llama *imagen* del dominio de la función.

4.2.7 CLASIFICA COMO RELACIÓN O FUNCIÓN, SEGÚN CORRESPONDA, Y ENCUENTRA EL DOMINIO Y LA IMAGEN PARA CADA UNO DE LOS SIGUIENTES CONJUNTOS:

Ejemplos

- {(1,2), (2, 3), (3, 2), (4, 2), (5, 2)} Función. D_f = {1, 2, 3, 4, 5}; I_f = {2, 3}
- {(1, 3), (1, 4), (2, 5), (2, 6), (5, 7)} Relación. (se repite el primer elemento)
  D_r = {1, 2, 5}; I_r = {3, 4, 5, 6, 7}

1. {(1,3), (2,5), (3,9), (4, 10)}
   ____
2. {(-2,0), (5,-5), (-2,-2)}
   ____
3. {(6,-2), (-2,6), (4,-1), (-1, 4), (0,5), (5,0)}
   ____
4. {(-1,10), (-1,0), (-1,3)}
   ____
5. $\{(x, y) \mid 4x + y = 2, x \in \mathbf{R}\}$
   ____

6. $\{(x, y) |\ x^2 + y^2 = 1,\ \ -1 \leq x \leq 1,\ x \in \mathbf{R}\}$

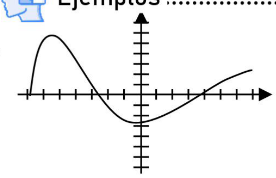
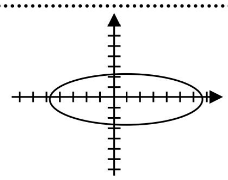
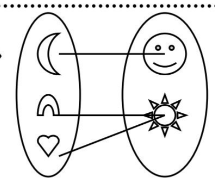
____

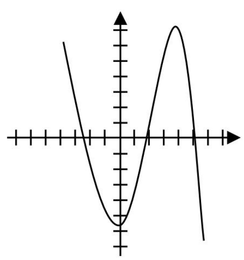
7. $\{(x, y) |\ y < x, x \in \mathbf{R}\}$

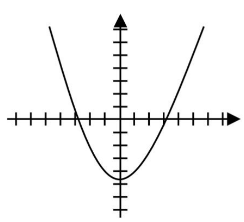
____

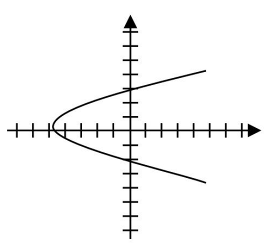
4.2.8 ANALIZA SI LAS SIGUIENTES FIGURAS REPRESENTAN UNA FUNCIÓN O UNA RELACIÓN.

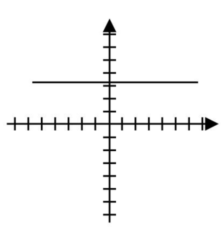
Ejemplos

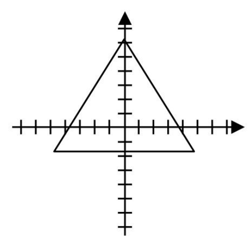
- 
Función.
- 
Relación.
- 
Función.

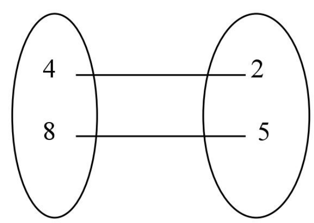
1. 

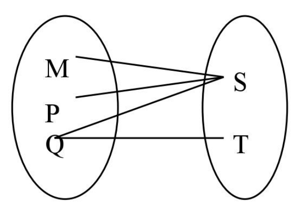
2. 

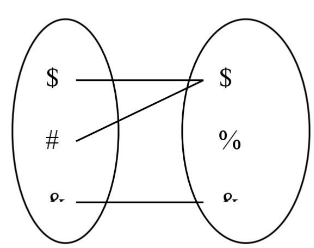
3. 

4. 

5. 

6. 

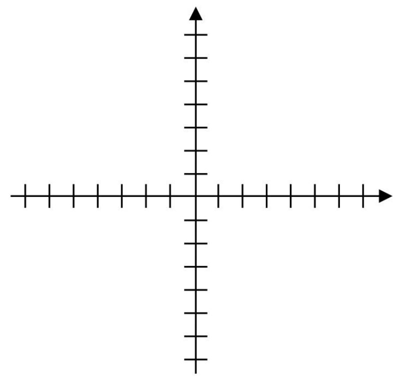
7. 

8. 

4.2.9 RESUELVE LOS SIGUIENTES EJERCICIOS.

1. Dada la función 2x-3, tabular y graficar para obtener dominio y codominio.

x	y



Dominio = ________________

Codominio = ______________

2. Una función g cuyo dominio es el conjunto: $D_g = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ está definida por $g(x) = 3x + 2$.

   a) Encuentra $g(0)$, $g(-1)$ ________________________________

   ____

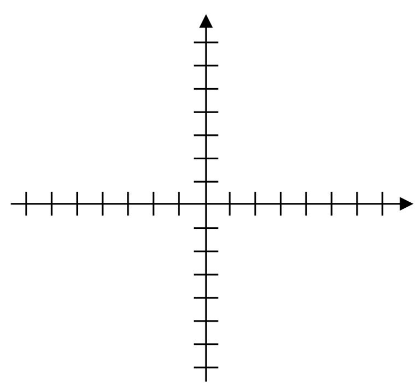
   b) Escribe g como un conjunto de pares ordenados.________________

   ____

   c) Escribe la imagen de g . ________________________________

3. Tabula y grafica la función $f(x) = -x^2 + 3$. Indica su dominio e imagen.

x	y



Dominio = ____________________

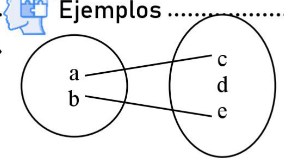
Imagen = _____________________

3. Propiedades de las Funciones

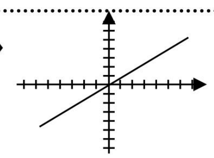
Def. Sea f una función de A en B, entonces f es ***inyectiva*** si y solo si a elementos distintos de A, les corresponde imágenes distintas en B, es decir que ningún par de elementos diferentes del dominio tiene la misma imagen. f(x) = f(y) solo cuando x = y.
Una función f: A→B es ***sobreyectiva*** (suprayectiva) si y solo si cada elemento de B es imagen de al menos un elemento de A, es decir, todos los elementos del codominio están asociados con por lo menos uno del dominio. Im_f = B.
Una función que es suprayectiva e inyectiva se llama función ***biyectiva***. Aquí cada elemento de B es imagen de un y solo un elemento de A.

4.3.1 INDICA EL DOMINIO, CODOMINIO E IMAGEN DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES. MENCIONA SI ES INYECTIVA, SOBREYECTIVA, BIYECTIVA, O NINGUNA DE ELLAS.

Ejemplos

- 

D_f = {a, b}
C_f = {c, d, e}
I_f = {c, e}
Inyectiva

- 
D_f = **R**
C_f = **R**
I_f = **R**
Biyectiva

1. f: **N**→**N**, f = {(x, 2) | x ∈ **N**}

   Dominio: ________________ Codominio: ______________________

   Imagen: __________________ Clasificación: ____________________

2. f: A→**R**, A = {1, 2, 3}, f = {(1, 0), (2, 5), (3, 6)}

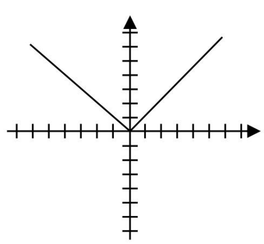
   Dominio: ________________ Codominio: ______________________

   Imagen: __________________ Clasificación: ____________________

3. f: A→B, A = {0, 4, 8}, B = {1, 2}, f = {(0, 1), (4, 2), (8, 1)}

   Dominio: ________________ Codominio: ______________________

   Imagen: __________________ Clasificación: ____________________

4. 

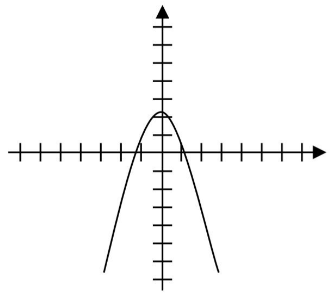
   Dominio: ________________

   Codominio: ______________

   Imagen: _________________

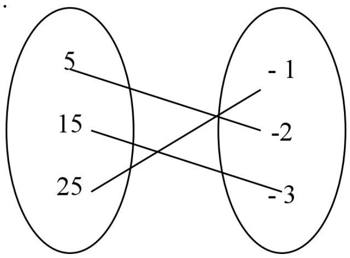
   Clasificación: ____________

5.



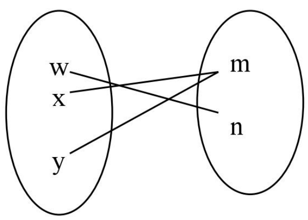
Dominio: ________________
Codominio: ______________
Imagen: _________________
Clasificación: ____________

6.



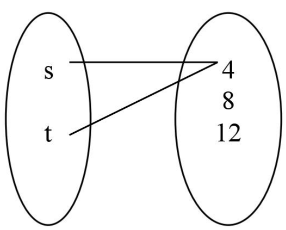
Dominio: ________________
Codominio: ______________
Imagen: _________________
Clasificación: ____________

7.



Dominio: ________________
Codominio: ______________
Imagen: _________________
Clasificación: ____________

8.



Dominio: ________________
Codominio: ______________
Imagen: _________________
Clasificación: ____________

9. A = {1, 2, 3, 4}; B = {a, e, i, o, u} ; f: A→B,
f = {(1, a), (2, e), (3, u), (4, o)}.

Dominio: ________________ Codominio: ____________________

Imagen: _________________ Clasificación: __________________

4.3.2 CLASIFICAR LAS SIGUIENTES FUNCIONES EN:

- FUNCIONES INYECTIVAS QUE NO SON SOBREYECTIVAS
- FUNCIONES SOBREYECTIVAS QUE NO SON INYECTIVAS
- FUNCIONES QUE NO SON NI INYECTIVAS NI SOBREYECTIVAS
- FUNCIONES BIYECTIVAS

1. S = {1, 2, 3}; T = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}; f: S→T; $f = \{(x,y) \mid y = 2x + 3\}$

   ____

2. Sean L = {2, 4, 6, 8}; N = {2, 4, 6, 8} y f: L→N, definida como $f(x) = x$.

   ____

3. Sean G = {0, 1, 2, 3}; H = {0, 1, 8, 27} y f: G→H, definida como $f(x) = x^3$.

   ____

4. Sean A = {-1, 0, 1}; B = {0, 1} y g: A→B, definida como $g(x) = x^2$.

   ____

5. B = **Z**; C = {0, 1}; f B→C definida como:

   $$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \text{ es par} \\ 1 \text{ si } x \text{ es impar} \end{cases}$$

   ____

4.3.3 MEDIANTE DIAGRAMAS DA UN EJEMPLO DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES:

a) Una función inyectiva y no sobreyectiva

b) Una función sobreyectiva y no inyectiva

c) Una función que no sea ni inyectiva ni sobreyectiva

d) Una función biyectiva.

4. Clasificación de Funciones

Def. Se llama función real de variable real, o simplemente función real a una función cuyo dominio y codominio están contenidos en el conjunto de los números reales.
Las funciones se clasifican en *algebraicas* y *trascendentales*:
Las funciones algebraicas pueden obtenerse al efectuar un número finito de operaciones de suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíces.
Las funciones que no cumplen esta característica se llaman funciones no algebraicas o trascendentales. Éstas últimas pueden ser exponenciales, logarítmicas o trigonométricas.

4.4.1 CLASIFICA CADA FUNCIÓN COMO ALGEBRAICA O TRASCENDENTE.

Ejemplos

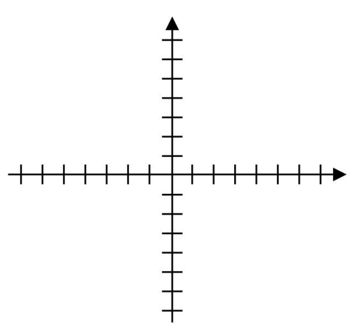
- $y = x^5 + x^4/3 + 8 - \sqrt{2}$ — Algebraica
- $f(x) = 3\text{sen } x + 2x$ — Trascendente

1. $f(x) = (y^3 - 1)/y$ ________
2. $y = 3\log_5(m - 1)$ ________
3. $f(z) = 1/3\ a^2 - ½$ ________
4. $f(n) = 150(0.032)^{2x}$ ________
5. $y = -\cos y^3 + 2^y$ ________
6. $f(x) = a^2$ ________
7. $f(x) = 2^a$ ________
8. $(8b^3 + 2b)/4$ ________

Def. Toda función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ cuya regla de correspondencia es f(x) = a, se llama función ***constante*** y tiene por gráfica una línea recta que es paralela al eje de las abscisas.

4.4.2 REALIZA LA GRÁFICA DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES, INDICA SU DOMINIO E IMAGEN.

1. $f(x) = 5$
   $D_f =$ ________
   $I_f =$ ________
2. $f(x) = -2$
   $D_f =$ ________
   $I_f =$ ________



¿Son funciones inyectivas?
____

¿Son sobreyectivas?
____

¿Son biyectivas?
____

Def. Una función ***lineal*** es aquella cuya gráfica es una línea recta. Entre ellas, encontramos la función ***identidad***, que a cada número real le asigna el mismo número, es decir, f (x) = x. La función identidad también se simboliza con I(x).

4.4.3 GRAFICA LAS SIGUIENTES FUNCIONES LINEALES, INDICA SU DOMINIO E IMAGEN.

1. $f(x) = x$

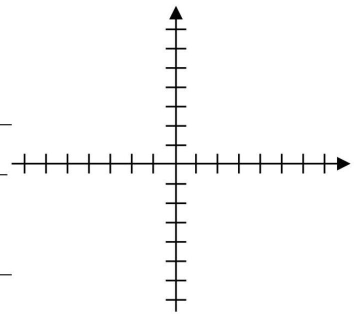
   $D_f =$ ____________

   $I_f =$ ____________

2. $f(x) = x + 4$

   $D_f =$ ____________

   $I_f =$ ____________



¿Son funciones inyectivas?

____

¿Son sobreyectivas?

____

¿Son biyectivas?

____

Def. La ***pendiente*** de una recta que pasa por dos puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ está definida como el cociente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad x_1 \neq x_2, \; m \in \mathbf{R}.$$

4.4.4 EN CADA UNO DE LOS SIGUIENTES EJERCICIOS ENCUENTRE LA PENDIENTE DE LA RECTA QUE PASA POR LOS PUNTOS DADOS:

Ejemplos

► $P_1 = (4, 2)$, $P_2 = (-2, 4)$.

$$m = \frac{4-2}{-2-4} = \frac{2}{-6} = -1/3$$

1. $P_1 = (2, 3)$, $P_2 = (3, 7)$ m = ______________________________
2. $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (-2, -2)$ m = ______________________________
3. $P_1 = (0, -4)$, $P_2 = (5, 2)$ m = ______________________________
4. $P_1 = (-3, 2)$, $P_2 = (-2, -7)$ m = ______________________________
5. $P_1 = (-1, -3)$, $P_2 = (-2, -1)$ m = ______________________________

Def. La función f: R→R, con regla de correspondencia $f(x) = mx + b$, tiene por gráfica una línea recta que interseca al eje de las ordenadas en el punto (0, b), es decir, la ecuación de tal recta está dada por $y = mx + b$.

4.4.5 DEDUCE LA FORMA SIMPLIFICADA DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA CON LA PENDIENTE Y ORDENADA AL ORIGEN DADOS:

Ejemplos

- $m = ½$, $b = -4$ $\quad$ $y = mx + b = ½x - 4$

1. $m = 2$; $b = -2$ ______________________
2. $m = -½$; $b = 0$ ______________________
3. $m = \sqrt{2}$; $b = 1$ ______________________
4. $m = 1$; $b = -5$ ______________________
5. $m = ¼$; $b = 4$ ______________________

Def. Una función real f es ***creciente*** en un intervalo si y solo si, para todo x_1 y x_2 en el intervalo con $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$. Esto es, si la pendiente es positiva.
Una función real f es ***decreciente*** en un intervalo si y solo si, para todo x_1 y x_2 en un intervalo con $x_1 < x_2$, $f(x_2) < f(x_1)$. Esto es, si la pendiente es negativa.

4.4.6 ENCUENTRA LA PENDIENTE Y LA ORDENADA AL ORIGEN DE LA RECTA DADA. INDICA SI LA FUNCIÓN ES CRECIENTE O DECRECIENTE.

Ejemplos

- $6x + 3y = 9$

  $3y = 9 - 6x$ $\qquad$ $m = -2$; $\quad b = 3$

  $y = \dfrac{9 - 6x}{3} = 3 - 2x = -2x + 3$ $\qquad$ como m es negativa, es una función decreciente.

A. $y = 3x - 2$ ______________ $\qquad$ D. $x - y + 3 = 0$ ______________

B. $y = ½x + 1$ ______________ $\qquad$ E. $-2x - y = 6$ ______________

C. $2x + y - 2 = 0$ ______________ $\qquad$ F. $12x - 4y = 8$ ______________

Def. Otra forma de expresar la ecuación de una recta es conocida como punto-pendiente y está dada por:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

4.4.7 ENCUENTRA LA ECUACIÓN DE LA RECTA CON LOS SIGUIENTES DATOS, TRAZA LA GRÁFICA E INDICA SI ES CRECIENTE O DECRECIENTE.

Ejemplos

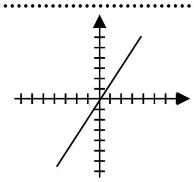
- $P_1 = (2, 3)$, $P_2 = (4, 6)$ $m = \frac{6-3}{4-2} = 3/2$

  <u>creciente</u>

  $y - y_1 = m\,(x - x_1)$

  $y - 3 = 3/2\,(x - 2)$

  $y = 3x/2 - 3 + 3 = \underline{{}^{3}/_{2}\,x}$



a) $P_1 = (0, -4)$, $P_2 = (1, 3)$ ____________________________________

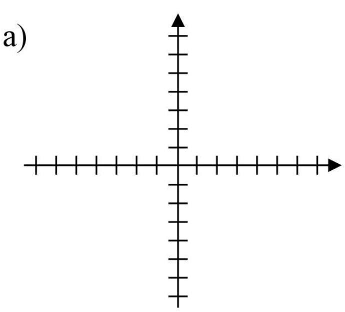
b) $m = -3$, $P_1 = (4, -2)$ ____________________________________

c) $m = 0$, $P_1 = (-4, -1)$ ____________________________________

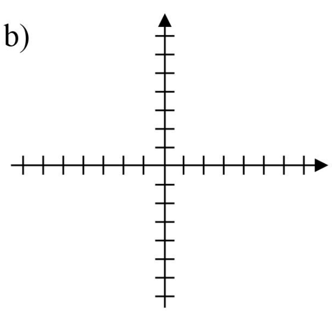
d) $P_1 = (-4, -2)$, $P_2 = (-1, -1)$____________________________________

e) $P_1 = (2, 1)$, $P_2 = (4, 2)$ ____________________________________

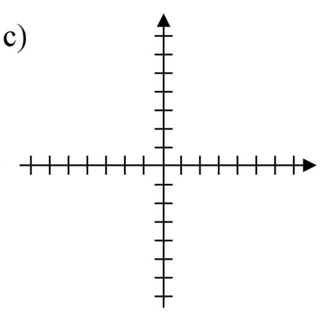
a)



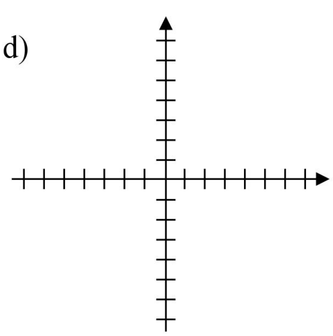
b)



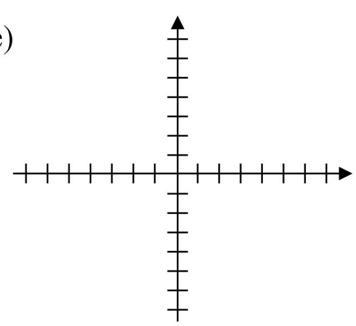
c)



d)



e)



4.4.8 SELECCIONA LA RESPUESTA CORRECTA.

1. La ecuación de la recta que pasa por los puntos (2, -1), (0, 11) es:
   a) $4x + y - 9 = 0$
   b) $-6x + y - 13 = 0$
   c) $6x + y - 11 = 0$
   d) $-4x + y + 7 = 0$
2. La ecuación de la recta con pendiente –5 y que pasa por el punto (0, - 3) es:
   a) $5x + y - 6 = 0$
   b) $5x + y + 5 = 0$
   c) $5x + y + 3 = 0$
   d) $-5x + y - 5 = 0$
3. La recta que pasa por el origen y cuya pendiente es igual a 6 es:
   a) $y = 6x$
   b) $6x + y = 0$
   c) $-6x - y = 0$
   d) $6y = x$
4. La ecuación de la recta perpendicular al eje x en el punto (-8, 0) es:
   a) $x = 8$
   b) $y = -8$
   c) $x + y - 8 = 0$
   d) $x = -8$
5. La recta perpendicular al eje y en el punto (0, 5) tiene por ecuación:
   a) $x - 5y = 0$
   b) $y = 5$
   c) $x + y - 5 = 0$
   d) $x = 5$
6. La función definida por $f(x) = x/5 - 5$ es una función lineal:
   a) Creciente
   b) Decreciente
   c) Constante
   d) Paralela al eje y
7. La función definida por $f(x) = 4 - 3x$ es una función lineal:
   a) Paralela al eje x
   b) Paralela al eje y
   c) Creciente
   d) Decreciente

Def. La función ***cuadrática*** es una función real y su forma general es

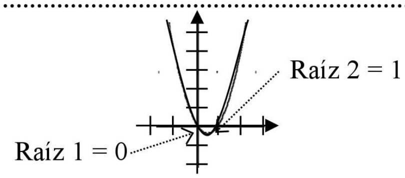
$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0.$$

La curva resultante al graficar esta función se llama parábola.
Una operación importante que se realiza en una ecuación cuadrática es la de encontrar el *conjunto de soluciones* o *raíces*, estos son los valores de las abscisas al origen de la ecuación f(x) = 0, y también se les llama ceros de la función f(x).

4.4.9 GRAFICA LAS SIGUIENTES FUNCIONES CUADRÁTICAS. IDENTIFICA LOS CEROS DE LA FUNCIÓN.

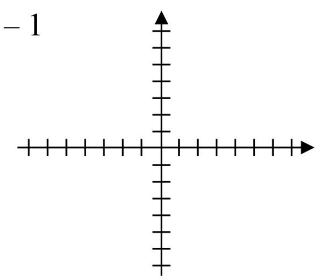
Ejemplos

► $x^2 - x$

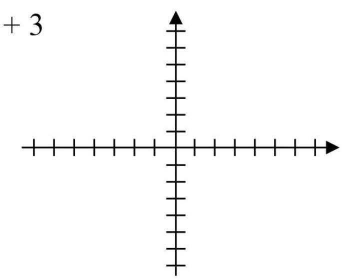


(puntos que interceptan la gráfica con el eje x)

A. $x^2 - 1$



B. $-3x^2 + 3$



Def. Las ecuaciones de la forma $ax^2 + c = 0$, se llaman cuadráticas puras, y las de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, se denominan cuadráticas mixtas.
En toda cuadrática pura, la incógnita es igual a más o menos la raíz cuadrada del cociente del término independiente entre el coeficiente de x^2 con el signo contrario. $x = \pm\sqrt{(c/a)}$

4.4.10 ENCUENTRA LAS RAÍCES DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES.

Ejemplos

► $x^2 - 9$ $\qquad x^2 = 9$

$x = \sqrt{9} = \underline{\pm 3}$

a) $x^2 - 16$ ____________________ c) $x^2 - 25$ ____________________

b) $x^2 - 4$ ____________________ d) $x^2 - a^2$ ____________________

Def. Si la ecuación cuadrática puede separarse en dos factores lineales, se obtienen las raíces de dichos factores, recordando que el producto de dos factores es igual a cero si cualquiera de estos factores es igual a cero.

4.4.11 ENCUENTRA EL CONJUNTO SOLUCIÓN DE LAS SIGUIENTES ECUACIONES POR EL MÉTODO DE FACTORIZACIÓN.

Procedimiento

Para resolver por factorización una ecuación cuadrática:

- ✓ Se escribe en forma canónica la ecuación.
- ✓ Se factoriza el miembro izquierdo.
- ✓ Se iguala cada factor a cero.
- ✓ Se resuelven las ecuaciones resultantes.

Ejemplos

► $6x^2 + 5x = 4$

Escribimos en forma canónica	$6x^2 + 5x - 4 = 0$	
Factorizamos	$(2x - 1)(3x + 4) = 0$	
Tenemos dos ecuaciones	$2x - 1 = 0$	$3x + 4 = 0$
Resolvemos	$x = ½$	$x = - 4/3$

A. $x^2 - x - 2 = 0$
B. $2x^2 - x = 10$
C. $6x^2 + 11x = - 3$
D. $18x^2 + 3 = 29x$
E. $12x^2 + 5x = 2$
F. $x^2 - \text{a}x + \text{b}x - \text{ab} = 0$

Def. Las raíces x_1 y x_2 de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A esta se le conoce como la ***fórmula cuadrática***.

4.4.12 ENCUENTRA LAS RAÍCES DE LAS SIGUIENTES ECUACIONES EMPLEANDO LA FÓRMULA CUADRÁTICA.

Ejemplos

► $x^2 - 6x + 8 = 0$ $\quad a = 1, \quad b = -6, \quad c = 8$

$$x = \frac{-(-6) \pm \quad (-6)^2 - 4(1)(8)}{2(1)} = \frac{6 \pm 2}{2}$$

$x_1 = (6 + 2) / 2 = 4$

$x_2 = (6 - 2) / 2 = 2$

1. $x^2 + 6x + 8 = 0$
2. $x^2 + 8x + 16 = 0$
3. $4x^2 - 12x + 9 = 0$
4. $x^2 + x + 1 = 0$
5. $6x^2 + 3x - 3 = 0$

Def. El término $b^2 - 4ac$ se conoce como ***discriminante*** y nos indica si la ecuación cuadrática tiene o no raíces reales. Tenemos tres casos:

- Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos soluciones reales, y la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ cruza el eje x en dos puntos.
- Si $b^2 - 4ac = 0$, la solución $ax^2 + bx + c = 0$ sólo es un número real, y la gráfica $y = ax^2 + bx + c$ toca al eje x en un punto.
- Si $b^2 - 4ac < 0$, $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene soluciones reales, y la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ no cruza al eje x. Las raíces son dos números complejos.

4.4.13 DETERMINA POR MEDIO DEL DISCRIMINANTE SI LAS SIGUIENTES FUNCIONES TIENEN RAÍCES REALES.

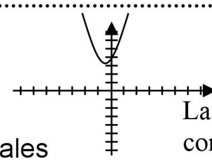
COMPRUÉBALO GRÁFICAMENTE

Ejemplos

► $x^2 + x + 4$ $\quad$ a = 1; b = 1; c = 4;

$b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(1)(4) = 1 - 16 = -15 < 0.$

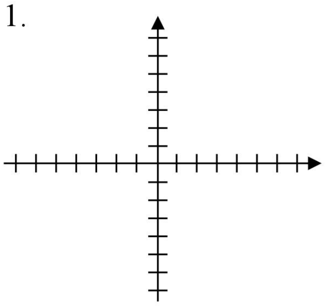
No tiene ceros reales



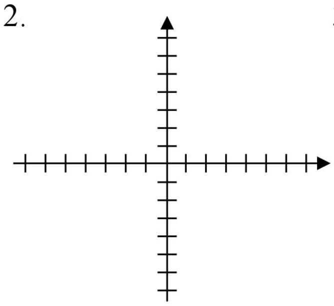
La gráfica no corta al eje x

1. $2x^2 + 6x + 2$ ____________________________________
2. $x^2 - 2x + 3$ ____________________________________
3. $x^2 - 2x + 1$ ____________________________________
4. $-x^2 - 2x - 1$ ____________________________________
5. $-3x^2 - 12x + 6$ ____________________________________

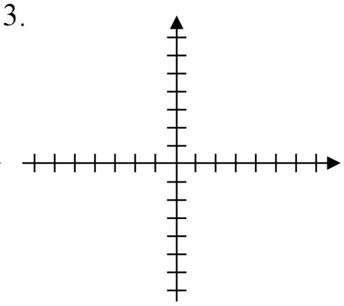
1.



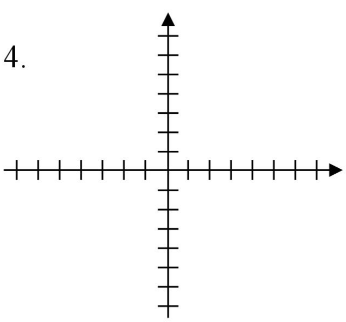
2.



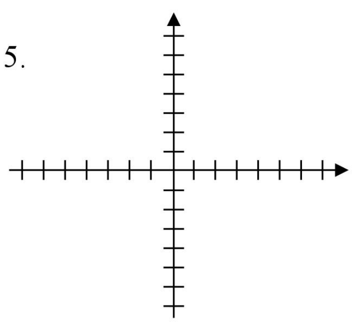
3.



4.



5.



Def. Nota que la gráfica de una ecuación cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx + c = 0$ es una parábola que se abre hacia arriba si $a > 0$ y se abre hacia abajo si $a < 0$.

Def. La función constante, la función lineal y la función cuadrática son casos particulares de la función polinomial. La función polinomial de grado n se expresa de la siguiente manera:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

Donde n es un entero no negativo y $a_0 \neq 0$. Haciendo $f(x) = 0$, formamos la correspondiente ecuación polinomial

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

Un valor de x que satisface a la ecuación es llamado una *raíz* o *solución* de la ecuación y también un *cero* del polinomio.

4.4.14 INDICA EL GRADO DE CADA UNA DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES POLINOMIALES.

Ejemplos

- $f(x) = 8$ cero
- $f(x) = x^2 - 8 + 3x^4$ cuatro

Grado

1. $f(x) = y^4 + 3y^3 - 5y^2 + 1$ ____________
2. $f(x) = m^2 + m^3 - 8m + 2$ ____________
3. $f(x) = 8x^5 - 1$ ____________
4. $f(x) = \frac{1}{2}x + 5$ ____________
5. $f(x) = 35$ ____________
6. $f(x) = 5 - x + 4x^2 - 3x^3 + 5x^6$ ____________

Def. ***Teorema del Residuo***. Si se divide un polinomio p(x) entre x – c, el residuo es igual a p(c).
Teorema del Factor. Un polinomio p(x) tiene un factor x – c si y solo si p(c) = 0.

Si p(x) es un polinomio de grado $n \geq 1$, entonces p(x) = 0 tiene exactamente n raíces, siempre y cuando la multiplicidad k de una raíz se cuente k veces.

Una de las operaciones más empleadas para encontrar las raíces de un polinomio es la llamada *división sintética.*

4.4.15 ENCUENTRA EL COCIENTE Y EL RESIDUO EN CADA PROBLEMA USANDO DIVISÓN SINTÉTICA. COMPRUEBA QUE EL RESIDUO ES IGUAL A P(C).

Procedimiento

- ✓ Coloca los coeficientes de f(x) en una línea y en orden de potencias descendentes de x, escribiendo cero como coeficiente de cada una de las potencias faltantes. Al final de la línea se escribe c.
- ✓ Reescribe el primer coeficiente de esta línea debajo de su posición para que sea el primer número de la tercera línea. Multiplica este número por c y coloca el producto debajo del segundo número de la primera línea, este es el primer número de la segunda línea, y escribe la suma de estos dos números de la segunda columna como segundo número de la tercera línea. Continúa este proceso hasta completar la segunda y tercera líneas, hasta la posición del último número de la primera línea, que es el término constante de f(x).
- ✓ Los números de la tercera línea dan los coeficientes del cociente en orden de potencias descendentes de x, siendo el último número el residuo. El grado del cociente es, uno menos que el grado del dividendo.

Ejemplos

► $(3x^4 - 8x^3 - 7x - 8) \div (x - 3)$

Colocamos cero en la primera línea como coeficiente de la potencia faltante de x.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3 & -8 & 0 & -7 & -8 & \underline{3} \\ & 9 & 3 & 9 & 6 & \\ \hline 3 & 1 & 3 & 2 & \underline{-2} & \end{array}$$

El cociente es $3x^3 + x^2 + 3x + 2$
El residuo es -2

$p(x) = 3x^4 - 8x^3 - 7x - 8$
$p(3) = 3(3)^4 - 8(3)^3 - 7(3) - 8 = -2$

1. $(2x^3 - 7x^2 + 3x + 1) \div (x + 1)$

2. $(x^3 - x^2 - 9x + 11) \div (x - 2)$

3. $(4x^3 + 4x^2 + x + 75) \div (x + 3)$
4. $(2x^4 + 7x^3 + x + 11) \div (x + 3)$
5. $(x^5 - x^4 - x^2 + 3) \div (x - 2)$
6. $(x^5 + 32) \div (x + 2)$

4.4.16 ENCUENTRA LAS RAÍCES DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES POLINOMIALES. COMPRUÉBALO GRÁFICAMENTE.

Ejemplos

► $f(x) = x^4 + x^3 + 4x^2 + 6x - 12 = 0$

Mediante ensayo y error, encontramos c, tal que f(c) = 0 (el residuo sea cero).

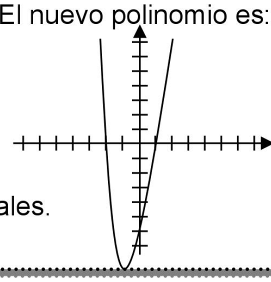
$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 4 & 6 & -12 & \underline{1} \\ & 1 & 2 & 6 & 12 & \\ \hline 1 & 2 & 6 & 12 & \underline{0} & \end{array}$$

x = 1 es una raíz.
El nuevo polinomio es: $x^3 + 2x^2 + 6x + 12 = 0$

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 6 & 12 & \underline{-2} \\ & -2 & 0 & -12 & \\ \hline 1 & 0 & 6 & 0 & \end{array}$$

x = - 2 es la segunda raíz.
El nuevo polinomio es: $x^2 + 6 = 0$

$x^2 = -6$
$x = \sqrt{-6}$
Las otras dos raíces
Son $\mathbf{x = \pm\sqrt{-6}}$, es decir, no son reales.



Solo tiene 2 raíces reales: 1 y –2.

1. $f(x) = 4x - 8$
2. $f(x) = 2x^2 + 2x - 12$
3. $f(x) = x^2 + 9x - 10$
4. $f(x) = 2x + 10$
5. $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

6. $f(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$
7. $f(x) = 2x^4 + 2x^3 - 22x^2 - 18x + 36$
8. $f(x) = 9x^4 - 45x^2 + 36$
9. $f(x) = 2x^5 - 10x^3 + 8x$
10. $f(x) = x^5 - x^4 - 12x^3 + 12x^2 + 27x - 27$

Unidad Temática 5

FUNCIONES ALGEBRAICAS

1. Funciones Algebraicas

5.1.1 ENCUENTRA MEDIANTE UNA TABLA LOS VALORES QUE SE SOLICITAN EN LOS SIGUIENTES EJERCICIOS.

Ejemplos

► Calcula el valor de la función $f(x)= x^2$. Con valores desde – 4 hasta 4.

x	- 4	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3	4
f(x)	16	9	4	1	0	1	4	9	16

1. Calcula los valores de la función $f(y) = 2y$ tomando: $y = 1, 2, 3, \pi, \sqrt{3}, 8, 40$.

y							
f(y)							

2. Si una motocicleta se mueve a una velocidad constante de 60 km/h, hallar la distancia que recorre en 1, 2, 3, 4, 5 y 6 horas.

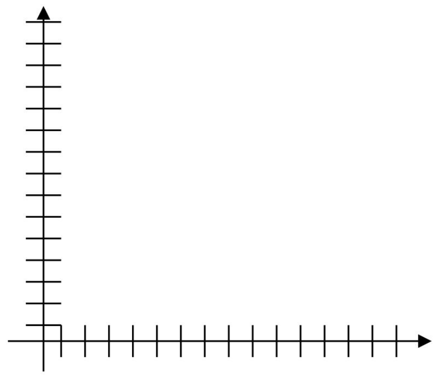
h						
d						

3. Se le ha colocado una cerca de una propiedad con forma de cuadrado. Calcula el número de metros lineales de cerca que se emplearon si la longitud del lado mide 10, 12, 14, 16, 18 y 30 metros.

l						
m						

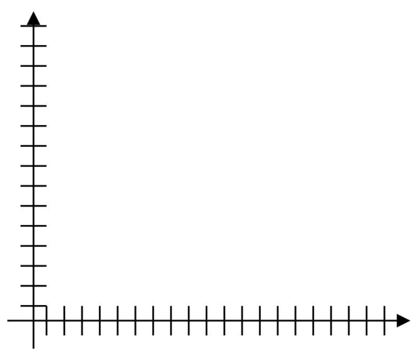
4. Sandra se ha formado en la fila para realizar un depósito en el banco, ella nota que el cajero tarda en promedio 90 segundos en atender a cada usuario. Grafica la función de tiempo de espera, partiendo de una fila que vaya desde cero hasta 15 personas.

Personas																
Tiempo (min)																



5. El veterinario de una tienda de animales desea graficar la función de consumo de un periquito para un rango de cinco a veinte días, El conoce que el perico requiere 20 gramos de alimento diario durante los primeros 15 días de vida, y que luego esta cantidad aumenta a razón de tres gramos por día hasta los 60 días de nacido, a partir de los cuales su alimentación diaria consiste en 200 gramos de alimento. Realiza la tabla y la gráfica deseada.

Día																
Consumo																



Def.

Una variable es llamada ***dependiente*** si está en función de otra a la que llamamos ***independiente***.

La variable y (dependiente) es función de la variable x (independiente) si existe una regla que a cada valor de x perteneciente a un cierto conjunto de números, le asigna un valor definido de y.

5.1.2 IDENTIFICA LA VARIABLE INDEPENDIENTE, LA VARIABLE DEPENDIENTE Y LA CONSTANTE, EN CADA UNO DE LOS CASOS SIGUIENTES. DÉ LA FORMULA CORRESPONDIENTE.

Ejemplos

► Si un examen tiene 15 preguntas, hallar la calificación C cuando el número de aciertos *n* es *n* = 1, 2, 3, ... , 15.

La calificación está dada por C = (n x 100)/15. Donde C es la variable dependiente, n la independiente y 15 la constante.

1. Un autobús se desplaza a una velocidad de 60 km/h, ¿qué distancia recorre en 1, 2, 3, 4, 5 horas?

2. Calcular el costo total C de n artículos iguales que tienen un precio de 70 pesos.

3. Determina el costo t del consumo de k metros cúbicos de agua que cuestan p unidades de dinero por metro cúbico.

4. El tanque de gasolina de un vehículo tiene una capacidad de 40 litros. Si el rendimiento es de 10 kilómetros por litro, hallar la cantidad de combustible que queda en el tanque después de recorrer una distancia d de 0, 10, 100, 200 kilómetros.

5. El costo de producción P de cierto producto se duplica cada n años, encuentra el costo P cuando han transcurrido $2n$, $3n$, $4n$ años.

6. Considera la función que le asigna a un número natural su segundo número consecutivo: al 1 el 3, al 2 el 4, al 3 el 5, etcétera. Escribe una fórmula para esta función: $f(n)$ = _______________. ¿Cuáles son las variables independiente y dependiente?

2. Ecuaciones de Primer Grado con una Incógnica

Def. Una ecuación de ***primer grado*** es aquella en que, después de efectuadas todas las reducciones posibles, el mayor exponente de la incógnita es 1.

Para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita se trasponen, todos los términos que contienen la incógnita a un miembro de la ecuación y todos los términos conocidos al otro miembro de la ecuación. La ecuación lineal con una incógnita ax + b = 0, a≠0, tiene la solución única x=-a/b

5.2.1 ENCUENTRA EL VALOR DE LA INCÓGNITA EN LAS SIGUIENTES ECUACIONES.

Ejemplos

► Encuentra la raíz de la siguiente ecuación: y – 5 = 3y - 25

Trasponiendo términos y – 3y = - 25 + 5

Reduciendo - 2y = - 2

y = -20/(-2) = 10

A. $8y = 80$	B. $5m = 8m - 15$
C. $3x = 64 - 5x$	D. $12 - 6t = 8t - 5$
E. $5c - 1 = 1 - 5c$	F. $a/2 = 3a - 3/4$.
G. $y - (2y + 1) = 8 - (3y + 3)$	H. $5x - 2/3 - 2(3 - x) = 0$
I. $6x = 4(5x - 2) + 20$	J. $(b - 2)^2 - (3 - b)^2 = 1$

5.2.2 RESUELVE LOS SIGUIENTES PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA.

Procedimiento

PARA RESOLVER UN PROBLEMA PLANTEADO EN LENGUAJE COMÚN

- ✓ Se lee el problema y se identifica específicamente lo que se pregunta. Se escribe una frase corta en lenguaje común para representar cada cantidad desconocida.
- ✓ Se asigna una variable para representar una de las incógnitas y se expresan las demás incógnitas en términos de esta variable.
- ✓ De ser necesario, se hace un esquema, o bien resumir la información en una tabla.
- ✓ Se escribe una ecuación que incluya la variable y que sea un modelo de la información dada en el problema.
- ✓ Se resuelve la ecuación.
- ✓ Se utiliza el resultado obtenido para responder la pregunta original.

Ejemplos

► La suma de dos números es 13. El cuádruple del número menor es tres unidades mayor que el triple del número mayor. Encontrar tales números.

Número menor: x
Número mayor: $13 - x$

$$\underbrace{\text{El cuádruple del}}_{4}\ \underbrace{\text{número entero menor}}_{x}\ \underbrace{\text{es tres}}_{=\ 3}\ \underbrace{\text{más}}_{+}\ \underbrace{\text{que el triple}}_{3}\ \underbrace{\text{del mayor.}}_{(13-x)}$$

$4x = 3 + 3(13 - x)$
$4x = 3 + 39 - 3x$
$7x = 42$
$x = 6$

Número menor: $x = 6$
Número mayor: $13 - x = 13 - 6 = 7$

1. Andrea es 8 años mayor que Karla. Hace 16 años, Andrea tenía el triple de edad que Karla. ¿Cuál es la edad actual de cada uno de ellos?

2. Ignacio tiene el doble de edad que su sobrina. Hace nueve años la suma de sus edades era 30 años. ¿cuál es su edad actual?

3. Jenny es tres veces mayor que Esteban. Dentro de 10 años será dos veces mayor. ¿cuál es su edad actual?

4. Hallar dos números tales que el menor sea 3/5 del mayor y la suma de ambos sea 96.

5. La suma de dos números es 72. Si la mitad del menor es la sexta parte del otro, determina dichos números.

6. Encuentra tres números pares consecutivos cuya suma sea 66.

7. Hallar dos números cuya suma sea 68 y el triple del menor sea el doble del mayor aumentado en cuatro unidades.

8. Hallar dos números enteros consecutivos cuya suma sea 103.

9. Andrés gastó \$325 por un libro, un cuaderno y un disco. El libro costó \$80 más que el cuaderno y el disco \$25 menos que el cuaderno. Hallar los precios respectivos.

10. El triple de un número excede en 48 al tercio del mismo. Hallar el número.

11. Hallar tres números consecutivos tales que si el menor se divide entre 20 y el mediano entre 27 y el mayor entre 41, la suma de los cocientes es 9.

12. Dividimos un paralelogramo en dos triángulos. Hallar la medida del ángulo mayor de uno de los triángulos si es cuatro veces mayor que el ángulo menor, y el otro ángulo es el doble del menor aumentado en cinco grados sexagesimales. Recuerda que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º.

13. Calcula el área de un rectángulo, si el largo mide el triple de su ancho y su perímetro es 160 m.

3. Sistemas de Ecucaciones Lineales de Segundo y Tercer Orden y sus Aplicaciones

Def.

Resolver un *sistema de ecuaciones simultáneas* es hallar el conjunto de valores que satisfacen simultáneamente cada una de sus ecuaciones.

Dos rectas no paralelas en un plano se intersecan exactamente en un punto. Se determinan las coordenadas de ese punto mediante las ecuaciones de las líneas, y de esta forma tenemos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables. La idea general es que las coordenadas del punto de intersección deben satisfacer cada ecuación.
Si las gráficas de las ecuaciones de un sistema son paralelas, se dice que las ecuaciones son inconsistentes y no existe ningún par ordenado que satisfaga ambas ecuaciones. Si las gráficas están sobre la misma recta, entonces se dice que las ecuaciones son dependientes y existe un número infinito de soluciones.

Los sistemas de ecuaciones pueden resolverse algebraicamente por el método de *eliminación* (reducción), *igualación* o *sustitución*.

Procedimiento

METODO DE ELIMINACIÓN POR SUMA O RESTA:
- ✓ Se multiplican los dos miembros de una de las ecuaciones o ambas, por números tales que resulten iguales los coeficientes de una misma incógnita.
- ✓ Se suman las dos ecuaciones si dichos coeficientes son de signos contrarios y se restan si son de mismo signo.
- ✓ Se resuelve la ecuación resultante con lo cual se obtiene el valor de la incógnita que contiene.
- ✓ Se sustituye este valor en una de las ecuaciones dadas y se resuelve para obtener así, el valor de la otra incógnita.

MÉTODO DE IGUALACIÓN:
- ✓ Se despeja en cada ecuación, la incógnita que se quiere eliminar.
- ✓ Se igualan las expresiones que representan el valor de la incógnita eliminada.
- ✓ Se resuelve la ecuación que resulta, con lo cual se obtiene el valor de la incógnita no eliminada.
- ✓ Se sustituye el valor hallado en una de las expresiones que representa el valor de la otra incógnita y se resuelve.

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN:
- ✓ Se despeja una incógnita en una de las dos ecuaciones.
- ✓ Se sustituye la expresión que representa su valor en la otra ecuación.
- ✓ Se resuelve la nueva ecuación, con lo que se obtiene el valor de la incógnita no eliminada.
- ✓ Se sustituye el valor hallado en la expresión que representa el valor de la otra incógnita. Se resuelve la ecuación resultante.

5.3.1 RESUELVE LOS SIGUIENTES SISTEMAS DE ECUACIONES.

Ejemplos

- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por los métodos gráfico y de igualación.

$$y = x + 4$$
$$y = 3x$$

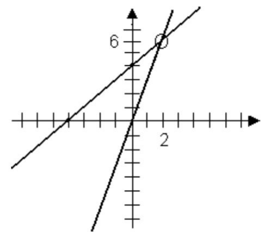
tenemos despejada la misma incógnita,

entonces, $x + 4 = 3x$

$4 = 3x - x = 2x$

$\underline{x = 2}$

sust. en cualquier ecuación: $\underline{y = 2 + 4 = 6}$



1. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de reducción:

   $5x + 6y = 20$
   $4x - 6y = -23$

2. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de sustitución:

   $2x - y = 5$
   $x - 3y = 5$

3. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de igualación.

   $x + 6y = 27$
   $7x - 3y = 9$

4. Resolver el siguiente de ecuaciones de segundo orden por el método que elijas.

   $5x + 3y = 5$
   $4x + 7y = 27$

5. Resuelve por el método que elijas.

   $45w + 21z = -3/2$
   $88w + 37z = -7$

6. Resuelve por sustitución, comprueba por igualación.

$5x - 3y = -5$
$\frac{1}{2}x + y = 6$

7. Resuelve el siguiente sistema por reducción, comprueba por sustitución.

$3x - 15y = 9$
$-3x + 4y = -20$

8. Resuelve el sistema por igualación, comprueba por reducción.

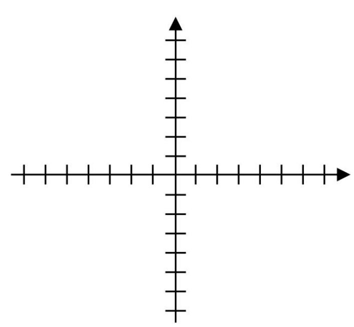
$3m - n = -10$
$4m + 2n = 0$

9. Resuelve por reducción, comprueba por el método de igualación.

$4s + 8t = 4$
$2s + 16t = 5$

10. Resuelve gráficamente.

$2x + y = 5$
$-3x + y = -5$



5.3.2 RESUELVE LOS SIGUIENTES PROBLEMAS MEDIANTE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Ejemplos

- Si 12 kilogramos de mango y 6 kg de plátano cuestan $102.00, mientras que 9 kg de mango y 13 kg de plátano cuestan $153.00, ¿cuál es el precio por kilogramo de cada producto?

  Precio del kg de mango: x
  Precio del kg de plátano: y

$$\underbrace{12}_{12}\ \underbrace{\text{kg de mango}}_{x}\ \underbrace{\text{y}}_{+}\ \underbrace{6}_{6}\ \underbrace{\text{kg de plátano}}_{y}\ \underbrace{\text{cuestan}}_{=}\ \underbrace{\$102.00}_{102}$$

$$\underbrace{9}_{9}\ \underbrace{\text{kg de mango}}_{x}\ \underbrace{\text{y}}_{+}\ \underbrace{13}_{13}\ \underbrace{\text{kg de plátano}}_{y}\ \underbrace{\text{cuestan}}_{=}\ \underbrace{\$153.00}_{153}$$

El sistema de ec. es:

$$12x + 6y = 102$$
$$9x + 13y = 153$$

Resolveremos por sustitución:

Despejando y de la 1ª ec.	y = - 2x + 17
Sustituyendo en la 2ª ec.	9x + 13(-2x + 17) = 153
Resolvemos	9x – 26x + 221 = 153
	x = (- 68)/(- 17) = 4
sust. en el primer despeje	y = -2(4) + 17 = 9

El precio del kg de mango = x = $4.00
El precio del kg de plátano = y = $9.00

1. Si 5 kg de arroz y 4 kg de frijol cuestan $30.00 mientras que 8 kg de arroz y 6 kg de frijol cuestan $47.00, encuentra el precio por kilogramo de cada producto.

2. El gerente de una compañía invirtió parte de su dinero al 12% y el resto al 15%. El concepto de interés por ambas inversiones totalizó $3000.00 Si hubiera intercambiado sus inversiones el ingreso habría totalizado $2940.00, ¿qué cantidad invirtió en cada porcentaje?

3. Se vendieron 12000 boletos para la rifa de una televisión y un reloj. El precio de los boletos para la televisión es de \$25.00 y \$15.00 para el reloj; si el ingreso total obtenido es de \$220 000.00, ¿cuántos boletos se vendieron para la televisión y cuántos para el reloj?

4. Una compañía distribuidora de abarrotes gasta \$120 000.00 en la compra de automóviles y camiones. Si el precio de cada camión es de \$14 000.00 y el del automóvil \$9000.00, ¿cuántos vehículos de cada clase se compraron si se adquirieron 10 vehículos?

5. Al ir corriente abajo en un río, un bote promedia una velocidad de 18 km/h. Al regresar a contracorriente su velocidad promedio es de 6 km/h, ¿cuál es la rapidez de la corriente del río?

6. Carolina depósito 125 billetes en el banco, unos de \$50.00 y otros de \$100. Si el total del depósito fue de \$8500.00, ¿cuántos billetes de cada valor tenía?

7. La densidad del vino de Borgoña es menor que la de la leche. La diferencia entre las densidades de ambos líquidos es 0.039 mientras que la suma es 2.021. Encuentra la densidad de cada uno.

8. Encuentra dos números cuya suma es 34 y su diferencia es 4.

9. Rafael es 5 años menor que su hermana Cristina. Hace 3 años ella tenía al doble de edad de él. ¿Cuántos años tiene cada uno?

10. El perímetro de un terreno rectangular es de 18 m y 4 veces el largo equivale a 5 veces el ancho. Hallar las dimensiones del terreno.

11. Encuentra dos números tales que ¼ de la suma de ambos es 45 y 1/3 de su diferencia es 4.

12. Un número es 16 unidades mayor que otro. Cuando se suman estos números, el resultado es 6 unidades menor que 3 veces el más pequeño de dichos números. Encuentra estos números.

13. En una empresa trabajan 75 personas, unas reciben como salario $30.00 cada uno y otros reciben $35.00 diarios cada uno. Si el monto total de los salarios diarios es $2,415.00 ¿Cuántas personas reciben $30 y cuántas $35?

5.3.3 SISTEMAS DE ECUACIONES SIMULTÁNEAS CON TRES VARIABLES.

Procedimiento

- ✓ Para resolver un sistema de tres ecuaciones, eliminamos una incógnita tomando dos de las tres ecuaciones siguiendo cualquier método (de adición y sustracción, o por el método de sustitución, por ejemplo).
- ✓ Eliminamos la misma incógnita tomando una pareja distinta de ecuaciones. Así obtenemos una pareja de ecuaciones que contiene únicamente dos incógnitas, sistema que puede resolverse por los métodos ya vistos.

Ejemplos

► Resuelve el sistema de ecuaciones:

(1) $x + y + z = 6$

(2) $x - y + 2z = 5$

(3) $x - y - 3z = -10$

Lo haremos por reducción,

De (1) y (2) tenemos:

$$\begin{array}{r} x + y + z = 6 \\ \underline{x - y + 2z = 5} \\ 2x \quad + 3z = 11 \quad (4) \end{array}$$

De (1) y (3) tenemos:

$$\begin{array}{r} x + y + z = 6 \\ \underline{x - y - 3z = -10} \\ 2x \quad - 2z = -4 \quad (5) \end{array}$$

De (4) y (5) tenemos:

$$\begin{array}{r} 2x + 3z = 11 \\ \underline{-(2x - 2z = -4)} \\ 5z = 15 \end{array}$$

Entonces $\underline{z = 15/5 = 3}$

sust. z en (4)

$2x + 3(3) = 11$

$\underline{x = (11 - 9)/2 = 2/2 = 1}$

sust. x y z en (1)

$(1) + y + (3) = 6$

$y + 4 = 6$

$\underline{y = 6 - 4 = 2}$

La solución es:

$x = 1$

$y = 2$

$z = 3$

A. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones de tercer orden.

$7x + 10y + 4z = -2$

$5x - 2y + 6z = 38$

$3x + y - z = 21$

B. Resuelve el sistema de ecuaciones:

$3x - 4y + z = 2$

$-2x - y + z = -9$

$x + 2y - z = 8$

C. Resolver

$4x + y - z = 7$

$x - 3y + z = -6$

$x + z = 0$

D. Cuál es el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

$$3x - 4y - z = 50$$
$$x - y + 2z = 0$$
$$5x + y + 3z = -6$$

E. Qué valores satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$2x + 2y - z = -12$$
$$5x - y = z$$
$$4x - y + z = 1$$

F. Resuelve:

$$\tfrac{1}{2}x + 1/3\, y + z = 4$$
$$\tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}z = 4$$
$$x + y + z = 9$$

5.3.4 RESUELVE LOS SIGUIENTES PROBLEMAS EMPLEANDO SISTEMAS DE ECUACIONES DE TERCER ORDEN.

1. Una fábrica produce tres tipos de productos x, y, z que se procesan con tres máquinas diferentes A, B, C. El tiempo en horas que se necesita usar por las tres máquinas para obtener una unidad de cada producto está expresado en el cuadro:

	x	y	z
A	2	5	2
B	4	1	3
C	8	5	1

Se dispone de 80 horas de la primera máquina, 57 de la segunda y 110 de la tercera. ¿Cuántas unidades de cada producto deben procesarse si se quiere emplear todo el tiempo disponible de las máquinas?

2. Un cafeticultor quiere envasar 120 kilogramos de una mezcla de tres clases de café de precios, \$43, \$44 y \$50, para venderlos a \$45 el kilogramo. Necesita también que el número de kilogramos del más caro sea la mitad más barato. ¿Cuántos kilogramos de cada variedad debe usar?

3. Juan, Luis y Ricardo fueron a comer pizza. Entre Juan y Ricardo comieron el doble que Luis. Pedro comió el doble que Ricardo. Entre los tres se terminaron una pizza. ¿Qué porción de pizza comió cada uno?

4. La Sra. Gómez gastó \$12.00 por un kilo de plátanos, un kilo de papas y un litro de aceite. El kilo de papa cuesta \$2 menos que el litro de aceite. El litro de aceite cuesta 4 pesos más que el kilo de plátano. ¿Cuál es el costo de cada artículo?

5. Los lados de un triángulo satisfacen las siguientes condiciones: la suma de las longitudes del primero y el segundo lados es igual a 22 cm. El doble de la longitud del primer lado menos el tercero es igual a 11 cm. La longitud del segundo más el doble del tercero es igual a 33 cm. ¿Qué dimensiones tiene el triángulo?

6. Encuentra tres números que satisfacen las siguientes condiciones: la suma de los tres es igual a 12. El primero, más el doble del segundo, más el triple del tercero, menos 16 unidades es igual a 10. El primero, más el triple del segundo, más cuatro veces el tercero es igual a 35.

7. Los lados de un triángulo rectángulo satisfacen las siguientes condiciones: la hipotenusa menos la suma de los catetos es igual a –2. La suma de los catetos más 3 centímetros es igual al doble de la hipotenusa. El doble de la diferencia de los catetos más dos centímetros es igual a 0. Encuentra las dimensiones del triángulo.

8. Arquímides fue un famoso científico griego que vivó en Sicilia antes de Cristo. Para saber en qué año nació, sigue las instrucciones. Se trata de un número de tres cifras. La mitad de la cifra de las centenas, más la cuarta parte de la de las decenas es igual a 3. La cifra de las centenas más la de las unidades suman 4. La cifra de las unidades más la de las decenas menos 10 es igual a 0.

4. Ecuaciones de Segundo Grado con una Ingónita y su Aplicación

Def. Si en una función cuadrática hacemos f(x) = 0, obtenemos una ecuación de ***segundo grado*** es decir, una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$.
Para resolver una ecuación de segundo grado podemos hacerlo mediante los métodos para encontrar las raíces de la función cuadrática ya estudiados, o mediante el método de *completar cuadrado*.

5.4.1 RESUELVE LAS SIGUIENTES ECUACIONES COMPLETANDO EL CUADRADO.

Procedimiento

- ✓ Se escribe la ecuación en forma canónica.
- ✓ Si el coeficiente del término de segundo grado no es 1, se divide entre este coeficiente cada término de la ecuación.
- ✓ Se escribe la ecuación con el término constante en el miembro derecho.
- ✓ Se suma a cada miembro el cuadrado de la mitad del coeficiente del término de primer grado.
- ✓ Se vuelve a escribir la ecuación con el miembro izquierdo expresado como un binomio al cuadrado; se simplifica el miembro derecho.
- ✓ Se resuelve la ecuación resultante

Ejemplos

► $2y^2 + 32y - 72 = 0$

div. entre 2	$y^2 + 16y - 36 = 0$	resolvemos:
trasp. constante	$y^2 + 16y = 36$	$y + 8 = \pm\sqrt{100} = \pm 10$
sumamos $(16/2)^2$	$y^2 + 16y + 64 = 36 + 64$	$y_1 = 10 - 8 = 2$
rescribimos	$(y + 8)^2 = 100$	$y_2 = -10 - 8 = -18$

A. $y^2 - 8y - 9 = 0$	B. $a^2 + 4a - 5 = 0$
C. $2x^2 + 16x = 0$	D. $x^2 - 2x + 5 = 0$

E. $x^2 + x - 1 = 0$	F. $9b^2 - 24b = -16$
G. $t^2 + \sqrt{3}\, t = 1$	H. $8x^2 + 8\sqrt{10}\, x - 16 = 0$

5.4.2 RESUELVE LAS SIGUIENTES ECUACIONES UTILIZANDO LA FÓRMULA DE LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO (PÁG. 128).

i. $y^2 + 4y - 96 = 0$	ii. $x^2 - 14x = -49$
iii. $z^2 - z = 2$	iv. $a^2 + 4a + 3 = 0$
v. $a^2 - 6 = 0$	vi. $4x^2 - 3x - 20 = 65$

5.4.3 ENCUENTRA LOS DATOS QUE SE TE INDICAN, EMPLEANDO ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

1. El producto de dos enteros pares consecutivos es 560. Encuentra el número mayor.

2. El largo de un terreno rectangular mide 6m más que su ancho. Si su área es de 280 m^2, encuentra sus dimensiones.

3. Encuentra 2 enteros positivos consecutivos cuyo producto es 42.

4. Andrés es 3 años más joven que Carlos. Si el producto de los números que expresan sus edades es 88, ¿qué edad tiene cada uno de ellos?

5. El largo de un rectángulo mide 2 cm más que su ancho. Si el área es de 120 cm^2, determina sus dimensiones.

6. Encuentra la altura de un triángulo, si es 8 cm mayor que el triple de su base y el área del triángulo es de 190 cm^2.

7. La suma de los cuadrados de tres enteros positivos consecutivos es 110. Determina cuáles son dichos números.

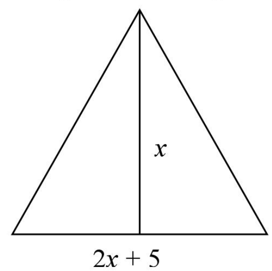
8. Encuentra un número entero tal que si al doble del mismo le sumas cinco veces su recíproco obtienes –7.

9. Calcula la suma de los números que satisfacen la ecuación: $10x^2 - 9x + 2 = 0$

10. El perímetro de una sala rectangular es de 42 m y su área es de 108 m^2. ¿Cuáles son sus dimensiones?

11. Calcula el producto de los números que satisfacen la ecuación: $2x^2 - 4x - 16 = 0$

12. Calcula la altura x del triángulo de la figura si su área es de 37.5 m^2.



13. Encuentra un número tal que la cuarta parte de la suma de dicho número más 12, multiplicada por la tercera parte de la diferencia del doble del número menos 1, es igual a 25.

14. Javier dice a Claudio: tengo ya muchos hijos, imagínate, si consideras 29 veces el número de hijos con que cuento y le restas 7 obtendrás 4 veces el cuadrado del número de hijos que tengo. ¿Cuántos hijos tiene Javier?

Unidad Temática 6

FUNCIONES TRASCENDENTALES

1. Función Exponencial y Logarítmica

Def.

Las funciones ***trascendentales*** pueden ser de tres tipos:
Logarítmicas. Funciones que manejan como operadores a los logaritmos.
Exponenciales. Estas funciones contienen a la variable independiente como una potencia, es decir, la variable está como exponente.
Trigonométricas. Éstas contienen como argumentos términos con funciones trigonométricas (Sen, Cos, Tan).

6.1.1 APLICA LAS REGLAS DE LOS EXPONENTES (PÁG. 39) Y CALCULA:

A. $2^2 \times 2^3$ ____________________________________

B. $3^2 \times 3^{-5}$ ____________________________________

C. $a^4a^7a^{-2}$ ____________________________________

D. $(b^4)^3$ ____________________________________

E. $(c^2)^{-1}$ ____________________________________

6.1.2 SIMPLIFICA LAS SIGUIENTES EXPRESIONES.

A) $\dfrac{2 \times 3^2 \times 5^7}{4^2 \times 3^{-2} \times 5^2} =$

B) $\dfrac{a^3b^1c^{-4}}{a^2b^3c^{-1}} =$

C) $\dfrac{d^x e^{1+y-zf-4}}{d^{2+y} e^{z+xf-1}} =$

Def.

Una ***función exponencial*** es una función de la forma $\mathbf{y = a^x}$, donde $a > 0$ y $a \neq 0$

Las gráficas de todas las funciones exponenciales pasan por el punto (0,1) porque $a^0 = 1$ si a es distinto de cero.

Todas las gráficas de estas funciones se encuentran por encima el eje de abscisas, ya que $a^x > 0$ si $a > 0$, para cualquier número real x.

6.1.3 REALIZA CON DIFERENTES COLORES LAS GRÁFICAS DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES EXPONENCIALES Y COMPÁRALAS.

A.

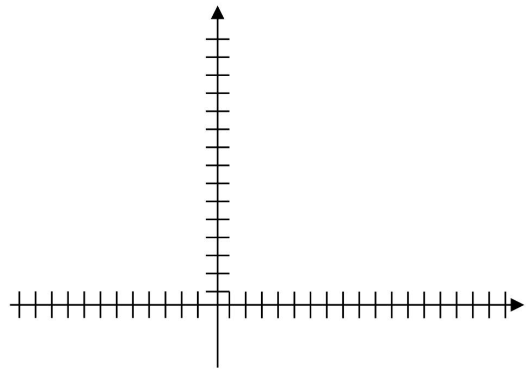
$y = 5^x$

$y = 4^x$

$y = 3^x$

$y = 2^x$

$y = 1.2^x$



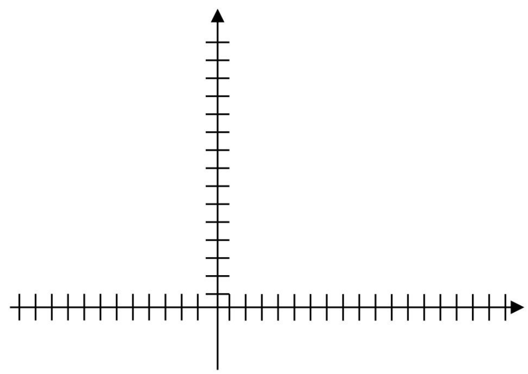
B.

$y = 0.8^x$

$y = 0.6^x$

$y = 0.4^x$

$y = 0.2^x$

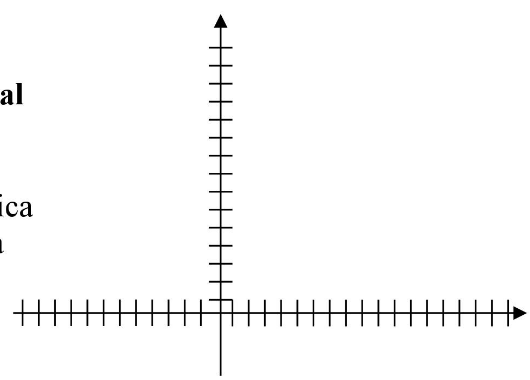


C.

La función exponencial **$f(x) = e^x$** se conoce como la **función exponencial natural**.

$e \approx 2.7182818284$

Con ayuda de tu calculadora científica traza un bosquejo de la gráfica de la función exponencial natural.



Def. Nota que si $a > 1$ las funciones son crecientes y tienen por asíntota al eje de las abscisas en su parte negativa.
Si $0 < a < 1$ las funciones son decrecientes y tienen por asíntota al eje de las abscisas en su parte positiva.

6.1.4 ¿PARA QUÉ VALORES DE x SE CUMPLEN LAS SIGUIENTES IGUALDADES?

a) $10^x = 100\,000\,000$	________	d) $5^x = 25$	________
b) $2^x = 8$	________	e) $(a^4)^x = a^{20}$	________
c) $10^x = 100$	________	f) $3^x = 9$	________

Def. El ***logaritmo*** de un número *y* es el exponente al cual hay que elevar la base a para obtener *y*. Esto es, si $a > 0$ y a es diferente de uno, entonces $\log_a y = x$ si y sólo si $y = a^x$.
La ecuación $\log_a y = x$ se lee "el logaritmo de *y* en la base a es x".
Si $y = e^x$, entonces $x = \log_e y = \ln y$. A este logaritmo se le conoce como ***logaritmo natural***.
Si no se escribe la base del logaritmo, se sobreentiende que es base 10.
$\log y = \log_{10} y$

6.1.5 ESCRIBE CADA ECUACIÓN EXPONENCIAL A LA FORMA LOGARÍTMICA Y VICEVERSA.

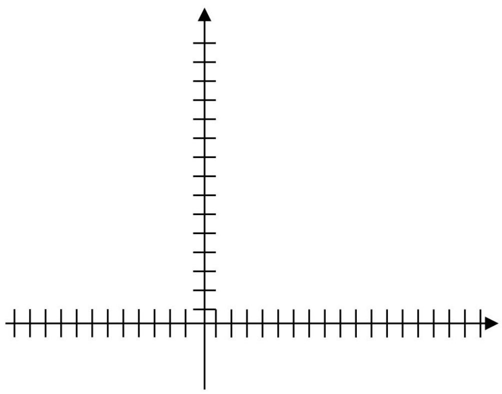
Ejemplos

- $2^3 = 8$ — $\log_2 8 = 3$
- $\log_{10} 0.01 = -2$ — $10^{-2} = 0.01$

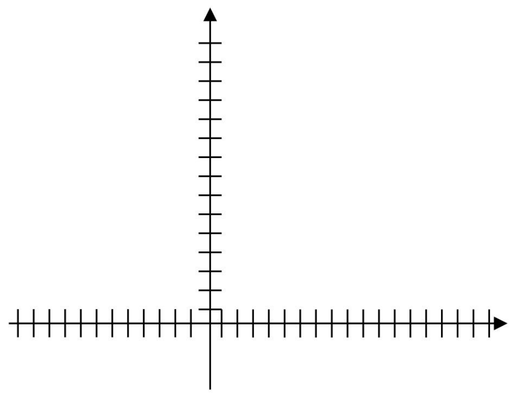
1. $5^5 = 3125$	____________	8. $\log_2 16 = 4$	____________
2. $4^3 = 64$	____________	9. $\log_5 25 = x$	____________
3. $2^x = 32$	____________	10. $\log_x 32 = 5$	____________
4. $m^n = 8$	____________	11. $\ln 5 = 1.6$	____________
5. $e^5 = y$	____________	12. $\ln x = 2$	____________
6. $e^x = 7$	____________	13. $\ln 17 = x$	____________
7. $e^0 = 1$	____________	14. $\log_{10} 4 = 0.6$	____________

6.1.6 TRAZA UN BOSQUEJO DE LAS FUNCIONES LOGARÍTMICAS.

A. $y = \log_{10} x$



B. $y = \ln x$



6.1.7 ENCUENTRA EL VALOR DE X.

Ejemplos

- ► $\log_{10}100 = x$ — $10^x = 100, \quad x = 2$
- ► $\log_x 125 = 3$ — $x^3 = 125, \quad x = 5$

1) $\log_{10} 1000 = x$ ________________

2) $\log_4 \frac{1}{64} = x$ ________________

3) $\log_3 x = -1$ ________________

4) $\log_x 27 = 3$ ________________

5) $\log_{27} x = \frac{-2}{3}$ ________________

6) $\log_3 x + \log_3 (x - 2) = 1$ ________________

7) $x - 3 = \log_2 32$ ________________

8) $x^2 - x = \log_5 25$ ________________

Def.

Propiedades comunes de los logaritmos: Para $a > 1$.

1) $\log_a 1 = 0$

2) $\log_a a = 1$

3) $\log_a (u\,v) = \log_a u + \log_a v$

4) $\log_a {}^{u}/_{v} = \log_a u - \log_a v$

5) $\log_a (u^n) = n \log_a u$

6) $\log_a M = \log_a N$, entonces $M = N$

6.1.8 ESCRIBE CADA EXPRESIÓN COMO UN ÚNICO LOGARITMO.

Ejemplos

- $\log_4 (x - 1) + 2\log_4 (x + 1) = \log_4(x - 1) + \log_4(x + 1)^2 = \log_4(x - 1)(x + 1)^2$.
- $5 \ln x - 2 \ln y - 3 \ln 1 = \ln x^5 - \ln y^2 - 0 = \ln(x^5/y^2)$.

a) $\log_3 (x - 2) - \log_3 (x + 2)$
b) $3 \ln x + 2 \ln y - 4 \ln z$
c) $\log_5 x + \log_5 y - \log_5 xy$
d) $4 \log_{10} (x + 1) + \log_{10} x$
e) $3 \log_m y + \log_m m$
f) $2[\ln x - \ln (x + 1) - \ln (x - 1)]$
g) $\ln 8 + \ln 6 - 3 \ln 2$

6.1.9 RESUELVE LOS SIGUIENTES PROBLEMAS APLICANDO EL USO DE LOGARITMOS.

1. La intensidad de un sonido (d) en decibeles está dada por la ecuación $d = 10$ (log P + 16), donde P es la potencia en watts/cm^2. Hallar:
   a) La intensidad de un sonido cuya potencia es de 0.0027 watts/cm^2.
   b) La potencia de un sonido cuya intensidad es de 120 decibeles.

2. Para calcular el área de la superficie de un cuerpo (A) se utiliza la fórmula empírica: $\log A = -\ 2.144 + 0.425 \log m + 0.725 \log h$, donde A se mide en m^2, m representa su peso en kilogramos y h la altura en centímetros. Calcula el área de una persona cuyo peso es 80 kg y mide 170 cm.

3. El potencial de hidrógeno (pH) de una sustancia está dado por la expresión: $pH = -\log [H^+]$; donde $[H^+]$ mide la concentración de iones de hidrógeno. Hallar:
   a) El pH de una sustancia si su valor $[H^+]$ es de 1.6×10^{-7}.
   b) La concentración de ion hidrógeno $[H^+]$ de un jugo de tomate si su $pH = 6.2$

4. El número de bacterias (N) presentes en un cultivo después de t horas, está dado por la ecuación: $N = 12000\,(2)^{t/2}$, hallar el número de bacterias después de 8 horas.

5. El censo de 1990 mostró que la población (P) en millones de habitantes después de t años se calcula con la expresión $P = 2.374\ (1.03)^t$, hallar:
   a) La población estimada en el año 2007
   b) ¿En qué año se estima que habrá 4.971 millones de habitantes?

6. La cantidad de material radiactivo (Q) que contiene una sustancia después de t años, está dada por $Q = 300(0.88)^t$, hallar la cantidad de material que contiene una sustancia después de 12 años.

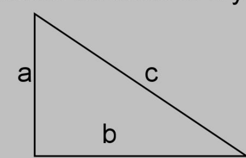
7. El número de bacterias presentes en un cultivo está dado por la ecuación: $y = 500(1.9)^x$, donde x representa el número de horas de proliferación. Determina el número de bacterias después de 5 horas de proliferación.

8. La cantidad y de 200 g de cierto material radiactivo que queda después de t años puede calcularse por la ecuación $y = 200(0.8)^t$. Determina:
   a) La cantidad de material radiactivo que quedará después de 12 años.
   b) La cantidad de material radiactivo que quedará después de 6 años y 9 meses.

2. Funciones Trigonométricas

Def. El ***Teorema de Pitágoras*** es el siguiente:
En un *triángulo rectángulo*, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la Hipotenusa.
De manera formal, si un triángulo tiene catetos de tamaño a y b, el valor c de la Hipotenusa está determinado por:

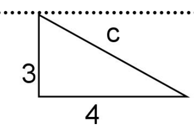
$$a^2 + b^2 = c^2$$



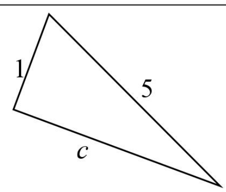
6.2.1 MEDIANTE EL TEOREMA DE PITÁGORAS ENCUENTRA LA LONGITUD DEL LADO DESCONOCIDO DE LOS SIGUIENTES TRIÁNGULOS.

Ejemplos

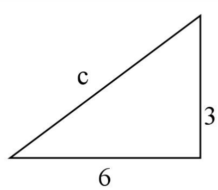
- $c^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2$
  $c^2 = 25$
  $c = 5$



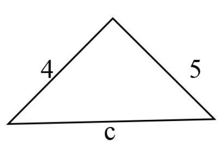
1.



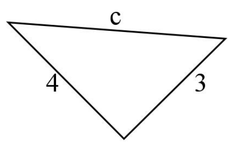
2.



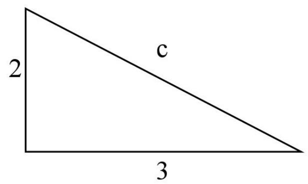
3.



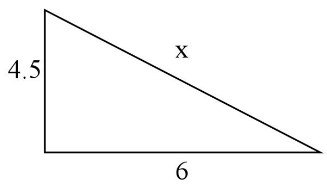
4.



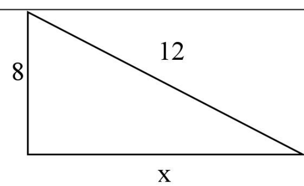
5.



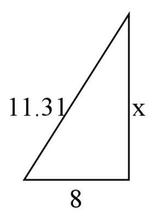
6.



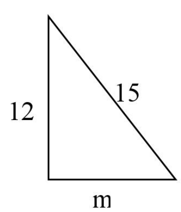
7.



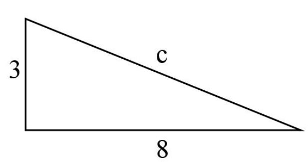
8.



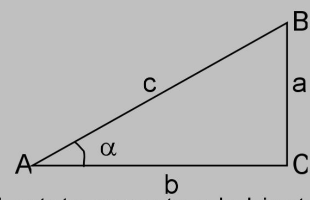
9.



10.



Def. El triángulo ABC es un triángulo rectángulo en C; lo usaremos para definir las funciones trigonométricas del ángulo α, correspondiente al vértice A



El ***seno*** es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa: Sen α = a/c

El ***coseno*** es la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa: Cos α = b/c

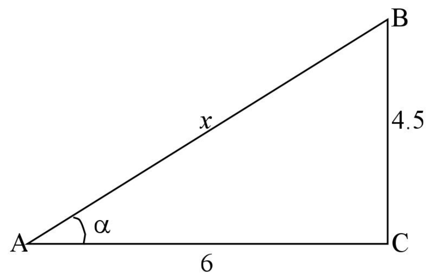
La ***tangente*** es la razón entre el cateto opuesto y el adyacente: Tan α = a/b

La ***cosecante*** es la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto: Csc α = c/a

La ***secante*** es la razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente: Sec α = c/b

La ***cotangente*** es la razón entre el cateto adyacente y el opuesto: Ctg α = b/a

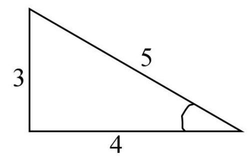
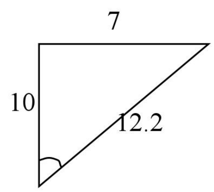
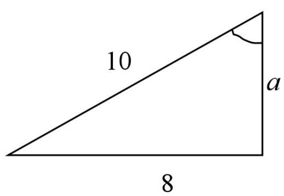
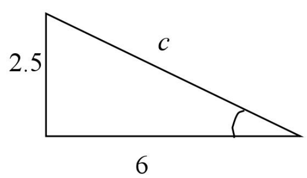
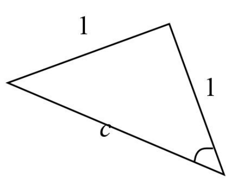
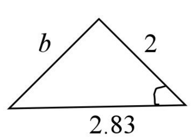
6.2.2 CALCULA EL VALOR DE LA HIPOTENUSA x Y LAS SEIS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA EL ÁNGULO α DEL TRIÁNGULO ABC.



x = ____________________

Sen α =	Cosec α =
Cos α =	Sec α =
Tan α =	Ctg α =

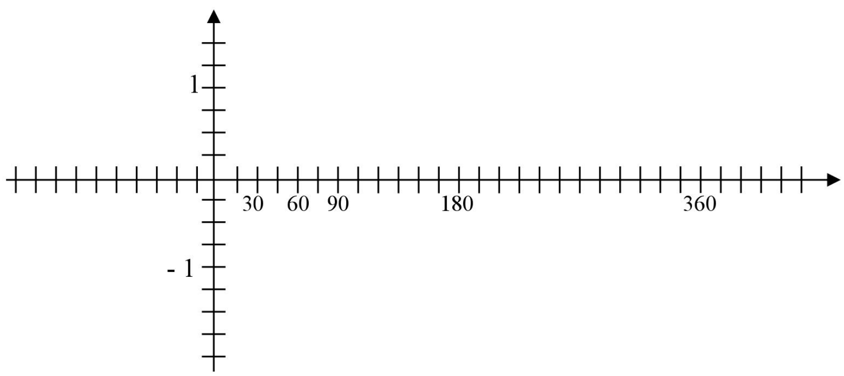
6.2.3 CALCULA LAS FUNCIONES SENO, COSENO Y TANGENTE DE LOS ÁNGULOS MARCADOS EN LOS SIGUIENTES TRIÁNGULOS:

<table>
<tr><td rowspan="3">A. 
</td><td>Sen α =</td></tr>
<tr><td>Cos α =</td></tr>
<tr><td>Tan α =</td></tr>
<tr><td rowspan="3">B. 
</td><td>Sen α =</td></tr>
<tr><td>Cos α =</td></tr>
<tr><td>Tan α =</td></tr>
<tr><td rowspan="3">C. 
</td><td>Sen α =</td></tr>
<tr><td>Cos α =</td></tr>
<tr><td>Tan α =</td></tr>
<tr><td rowspan="3">D. 
</td><td>Sen α =</td></tr>
<tr><td>Cos α =</td></tr>
<tr><td>Tan α =</td></tr>
<tr><td rowspan="3">E. 
</td><td>Sen α =</td></tr>
<tr><td>Cos α =</td></tr>
<tr><td>Tan α =</td></tr>
<tr><td rowspan="3">F. 
</td><td>Sen α =</td></tr>
<tr><td>Cos α =</td></tr>
<tr><td>Tan α =</td></tr>
</table>

6.2.4 CON AYUDA DE UNA CALCULADORA, COMPLETA LAS TABLAS Y REALIZA UN BOSQUEJO DE LAS FUNCIONES QUE SE INDICAN, EN EL EJE DE LAS ABSCISAS SITÚA LOS VALORES DEL ÁNGULO EN GRADOS.

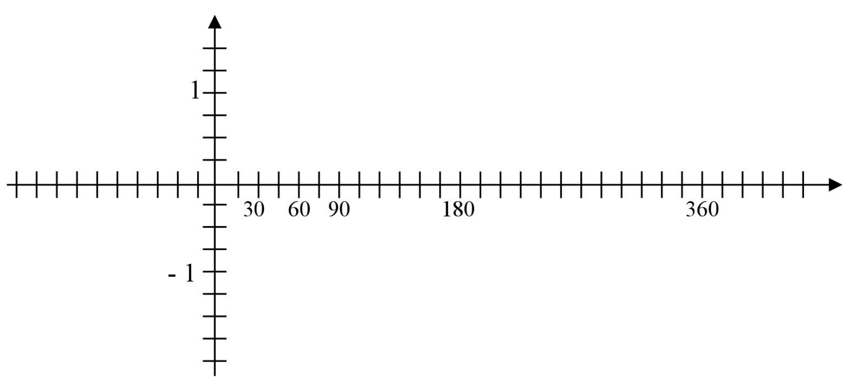
A. $y = \text{sen } x$

Ángulo	0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º	225º	270º	315º	360º
Seno													



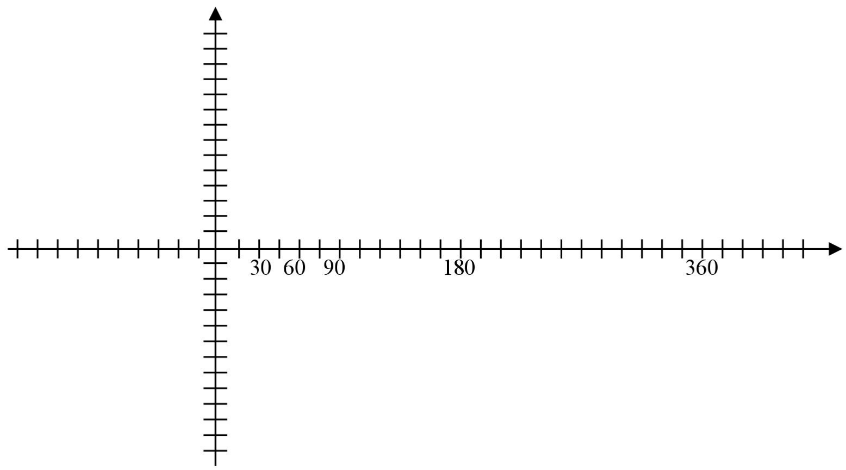
B. $y = \cos x$

Ángulo	0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º	225º	270º	315º	360º
Coseno													



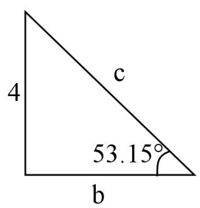
C. $y = \tan x$

Ángulo	0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º	225º	270º	315º	360º
Tangente													



6.2.5 CALCULA LA LONGITUD DE LOS LADOS DESCONOCIDOS, EMPLEANDO LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO CONOCIDO.

Ejemplos

▶ 

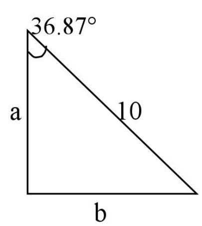
Sen 53.15 = 4/c

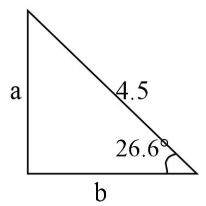
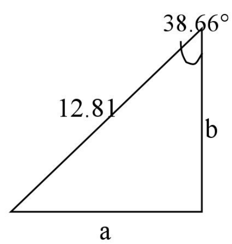
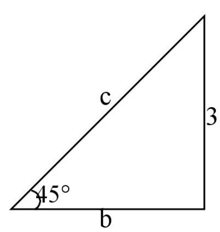
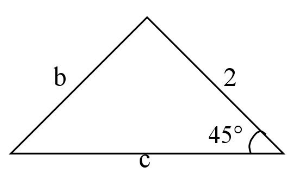
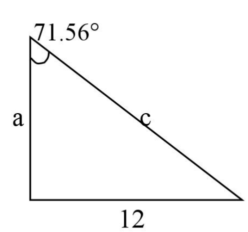
$c = \dfrac{4}{\text{sen } 53.15} = \dfrac{4}{0.8} = 5$

Tan 53.15 = 4/b

$b = \dfrac{4}{\tan 53.15} = \dfrac{4}{1.33} = 3$

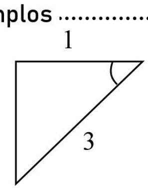
Nota: se obtienen los mismos resultados empleando correctamente cualquiera de las otras 4 funciones trigonométricas.

1. 

2.	a 4.5 26.6° b
3.	38.66° 12.81 b a
4.	c 3 45° b
5.	b 2 45° c
6.	71.56° a c 12

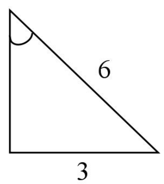
6.2.6 ENCUENTRA EL VALOR DEL ÁNGULO MARCADO, CON BASE EN LOS DATOS PROPORCIONADOS.

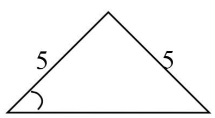
Ejemplos

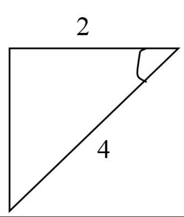
► 

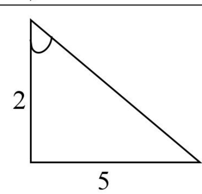
$$\text{Cos } \alpha = \frac{\text{cateto ad.}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1}{3} = 0.33333$$

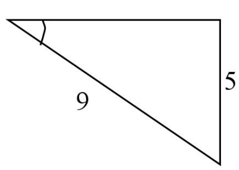
$$\alpha = \cos^{-1} 0.33333 = 70.53°$$

1. 

2. 

3. 

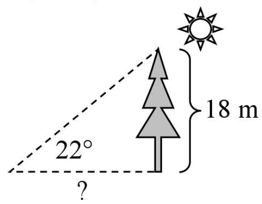
4. 

5. 

6.2.7 RESUELVE LOS SIGUIENTES PROBLEMAS.

Ejemplos

- Calcular la longitud de la sombra de un árbol de 18 m de altura cuando el ángulo que forman los rayos solares con el suelo es de 22º.



$$\tan 22° = \frac{18}{x}$$

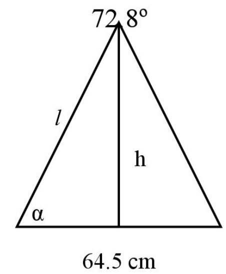
$$x = \frac{18}{\tan 22°} = 44.5$$

1. Cuánto miden los lados de un rombo cuyas diagonales miden 6 y 8 cm.

2. Cuánto miden los lados de un triángulo isósceles en el cual la base mide 20 cm y la altura 12 cm.

3. El largo de un rectángulo mide 120.4 m y su ancho es de 70.18 m. Determinar los ángulos que una de sus diagonales forma con los lados.

4. La base de un triángulo isósceles mide 64.5 cm y el ángulo opuesto, 72.8º. Calcular el resto de elementos.



5. Hallar la longitud de la sombra de un poste de 10 m de altura cuando los rayos del sol forman con la horizontal un ángulo de 15º.

6. Una escalera de 8.2m está apoyada en una pared de forma que alcanza una altura de 6m. ¿Qué ángulo forma con el suelo?

7. Para determinar la altura de un árbol nos hemos alejado 7 m de su base, hemos medido el ángulo que forma la visual al punto más alto con la horizontal, obteniendo un valor de 40º. ¿Cuánto mide el poste?

8. Un edificio de 40 m de altura proyecta una sombra de 16 m de longitud. ¿Qué sombra proyectará un árbol de 12 m de altura?

9. Para conocer la altura de un edificio hemos medido el ángulo que forma la visual al punto más alto con la horizontal, obteniendo un resultado de 34º. Al acercarnos 15 m hacia el edificio, obtenemos un nuevo ángulo de 57º. ¿Cuánto mide la altura de la torre?

10. Javier está situado a 87 m de un árbol, desde allí puede ver su copa bajo un ángulo de 22º. Roberto ve el mismo árbol bajo un ángulo de 25º. ¿A qué distancia está Roberto del árbol?

SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS

1.1.1 P, N, P, N, P, N, P, P, N, P.

1.1.2 F, F, V, V, V, F, V, F.

1.1.3 S, C (y), C (o), C (no), C (si y solamente si), C (o), C (si... entonces), S, C (no, si... entonces), C (y).

1.2.1 $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

1.2.2 q: (F), ~q: 15 no es menor que 12 (V);
p: (F), ~p: 2^4 no es un número primo (V);
s: (V), ~s: Canadá no está en América (F).

1.2.3
1. Hace mucho frío y llueve.
2. Llueve si y solo si hace mucho frío.
3. Llueve o no hace mucho frío.
4. Hace mucho frío si y solo si no llueve.
5. No es verdad que no llueve.
6. Si hace mucho frío y no llueve, entonces hace mucho frío.

1.2.4 $p \wedge q$, $\sim(\sim p \vee q)$, $\sim p \wedge \sim q$, $p \vee (\sim p \wedge q)$.

1.2.5

p	q	$p\wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p\rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$p\vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p\leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

p	$\sim p$
V	F
F	V

1.2.6

1.

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	F

2.

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim (p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

3.

p	q	$\sim q$	$p \rightarrow \sim q$	$\sim(p \rightarrow \sim q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F

4.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

1.2.7

1. Tautología

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
V	F	V
F	V	V

2. Contradicción

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	F
F	V	F

3. Contingente

p	q	$\sim q$	$p \leftrightarrow \sim q$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	F

4. Tautología

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow (p \vee q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

5. Tautología

s	q	p	[(s	$\rightarrow$	q)	$\wedge$	(q	$\rightarrow$	p)]	$\rightarrow$	(s	$\rightarrow$	p)
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V	F	F	V	V	F	F
V	F	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F	F	V	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	F	V	V	F	V	F	F	V	F	V	F
F	F	V	F	V	F	V	F	V	V	V	F	V	V
F	F	F	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F
Paso			1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1

1.3.1 **A.** V, F, F, F . **B.** F, F, V.

1.3.2 $p(x)$, $\forall$, $|$, $\in$, $\notin$, $\exists$.

1.3.3 1. a) $\sim(\forall x\in M)$(x es inteligente); b) $(\exists x\in M)$(x no es inteligente); c) $(\forall x\notin M)$(x es inteligente); d) $(\exists x\notin M)$(x es inteligente)
2. a) $(\forall x\in Z)(x>15)$; b) $(\exists x\in Z)$(x es primo); c) $(\forall x\in Z)$(x es positivo); d)$\sim(\exists x\in Z)$(x es negativo).
3. a) $(\exists x\in P)p(x)$; b) $(\forall x\in P)q(x)$; c) $(\exists x\in P)\sim r(x)$; d) $\sim(\exists x\in P)\sim s(x)$.

1.3.4 V, V, F, V, F.

1.3.5 F, V, F.

1.5.1 a) $12 \notin D$, $6 \in D$, $100 \notin D$, $4 \in D$; b) Cuadrado $\in$ P, trapecio $\in$ P, rectángulo $\in$ P, círculo $\notin$ P; c) estrella $\notin$ B, sol $\in$ B, tierra $\in$ B, Planeta $\notin$ B; d) $20 \notin D$, $37 \in D$, $35 \notin D$, $8 \notin D$.

1.5.2 comp, ext, comp, ext, comp, comp, ext, ext.

1.5.3 {6, 7, 8, 9}; A = { 2 }; C = $\varnothing$; D = {c, o, r, e, t}; S = {a, e, i, o, u}.

1.5.4 C = {x | x es natural, x es par}; D = {x | x es entero}; V = {x | x es una vocal}; A = {x | x es par, $0 < x < 10$}; B = {x | x = 3}.

1.5.5 F = {p, a}; F = {x | x es una letra de la palabra papa}; H = {4}; H = {x | 2x + 5 = 13} .

1.5.6 $x \in A$; $B \subset C$; $V \subseteq W$; $T \not\subset B$ $M = \varnothing$; $R = Q$; $R \supset Q$; 2^W o $P(w)$; $y\notin A$; $\varnothing$.

1.5.7 unitario, vacío, unitario, vacío.

1.5.8 finito, infinito, infinito, finito.

1.5.9 12, 13, 1, 0, 89.

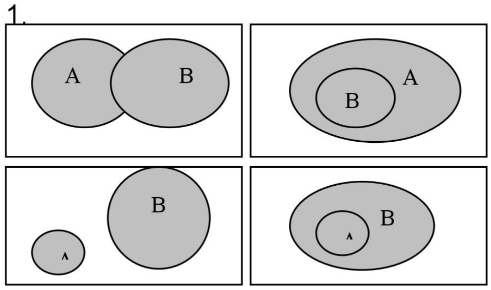
1.5.10 F, F, V, V, F.

1.5.11 1. $\varnothing$, {2}, {a}, {2, a}; 2. $\varnothing$, {x};
3. $\varnothing$, {2x}, {3y}, {4z}, {2x, 3y}, {2x, 4z}, {3y, 4z}, {2x, 3y, 4z}.

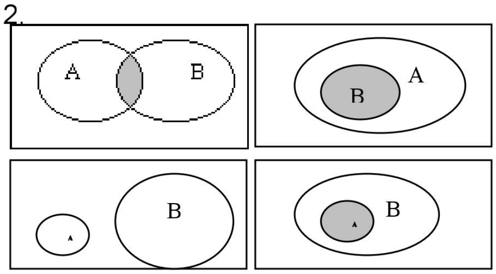
1.5.12 1. {1, 2, 4, 6, 7, 9, 10} 2. { } 3. {0, 2, 4, 6, 8, 10}
4. {0, 1, 3, 8, 9, 10} 5. {0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9} 6. {1, 7, 9}
7. {1, 4, 6, 7, 9, 10}.

1.5.13 1. {a, b, c, d, e, f, g} 2. {a, c, e} 3. {b, f}
4. {b, d, f} 5. {f} 6. {b, d, e, f, g}
7. {b, e, f, g} 8. {a, c, d} 9. {b, d, f, g}
10. U = {a, b, c, d, e, f, g}.

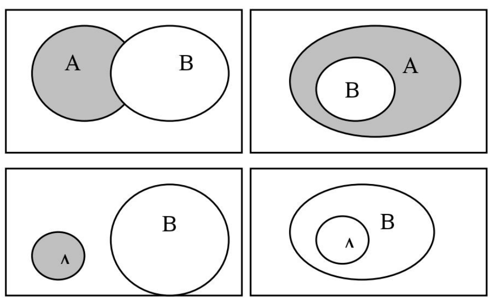
1.5.14 1.



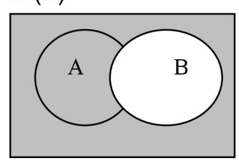
2.



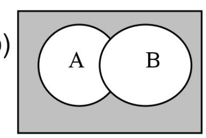
3.



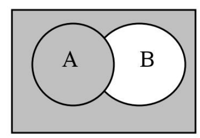
4. (a)



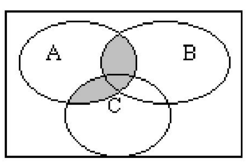
(b)



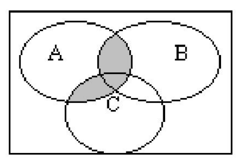
5.



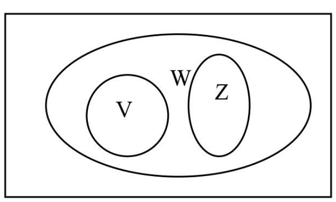
6.



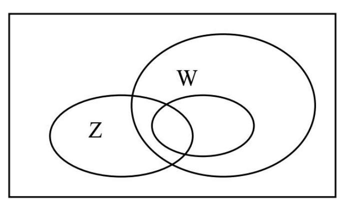
7.



1.5.15 1)



2)



1.5.16 1. No, b es un elemento y A un conjunto;
2. a) Correcto, b) Incorrecto, r es un elemento, no un subconjunto,
c) Incorrecto, {r} es un subconjunto no un elemento, d) Correcto;
3. a) Incorrecto, b) Correcto, c) Correcto, d) Incorrecto;
4. todos;
5. todos.

1.5. 17 A; A; U; A; $\varnothing$; $\varnothing$; U; U; A; $\varnothing$.

2.1.1 A $\neq$ B; P $\Leftrightarrow$ I; S $\Leftrightarrow$ T; K = D.

2.1.2 n(A)=4, n(B) =3, no son coordinables. n(P) = n (I) = 6, son coordinables.
n(S) = n(T) = 7, son coordinables. n(K) = n (D) = 4, son coordinables.

2.1.3 1. Indica el lugar que ocupa un objeto, elemento o conjunto en la progresión natural de los números.
2. La cantidad de elementos que contiene un conjunto. El número cardinal nos permite distinguir los conjuntos equivalentes de los no equivalentes.
3. Cinco
4. Que el conjunto A con cardinalidad x, es coordinable con el conjunto B cuyo número cardinal es y.
5. Cuando la cardinalidad del conjunto de personas es menor a la cardinalidad del conjunto de revistas. No son coordinables.
6. Porque la cardinalidad del conjunto de profesores es mayor que la cardinalidad del conjunto de salones. No son coordinables.

2.1.4 65 $>$ 6+5; $x+y = y+x$; 8 $<$ 12; 4x10 $<$ 70; 3x12 $>$ 3+12; $x < x + y$; $x > y$; $4y = 4y$; $w < t$; $m > p$.

2.1.5

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

2.1.6 A) primo, impar; B) par; C) impar; D) impar; E) par, compuesto; F) par, compuesto; G) impar; H) compuesto; I) impar, J) primo, impar.

2.1.7 11; 12; 9; 9; 14.

2.1.8 elemento neutro; conmutativa; asociativa; conmutativa; asociativa; conmutativa; elemento neutro.

2.1.9 A. a + (b + 8); 8 + a + b; B. 15 + (x + y); (15 + x) + y; C. 12 + 3y; 3y + 12.

2.1.10 a) 2 x 218; b) 6m; c) 1 x a; d) 4 x 1; e) 4; f) 0; g) a + a + a + a + a + a; h) m.

2.1.11 1) $3 \bullet (m \bullet n)$; 3mn; 2) $(a + b) \bullet 5$; 5a + 5b; 3) 7xy; $(xy) \bullet 7$; 4) $4 \bullet (p + q)$; 4p + 4q; 5) 6xmn; (nx)(6m) .

2.1.12 1. El número 1. 2. 1, 2, 1/3, 5, 0. 3. tres. 4. uno. 5. es 5 veces mayor. 6. cuatro.

2.1.13 1. $8x + 20$; 2. $20x + 12p + 20$; 3. $xz - yz$; 4. $yn + mn - xn$; 5. 243; 6. $ax - bx + cx - ex$; 7. $7rs$; 8. $mnxy + prxy$.

2.1.14 A. $12 \times 12 \times 12 = 1728$; B. $n \bullet n \bullet n \bullet n \bullet n$; C. $2y \bullet 2y \bullet 2y \bullet 2y$; D. $2(y \bullet y \bullet y \bullet y)$; E. $4n \bullet 4n \bullet 4n$.

2.1.15 A. 4^4; B. n^6; C. $(ax)^4$; D. ax^4; E. $3xy^6$; F. $3x^6y$; G. 243mn; H. $15yn^4$.

2.1.16 1) 520; 2) $5^4 = 625$; 3) $12^2 = 144$; 4) $4x^2$; 5) 33m; 6) $14a^y$; 7) 35; 8) 5^{m+n}; 9) a^{10}; 10) $20a^{3+x}$; 11) a^2; 12) 1; 13) a^6; 14) $3^3 = 27$; 15) 3^{2x}; 16) $x^{2m}y^{3m}$; 17) $8x^{7y}$; 18) 1; 19) n^{xy}; 20) y^{8x}; 21) 1; 22) 45^{6m}.

2.2.1 a) –3, 3; b) –12, 12; c) 8, -8; d) – 12, 12; e) 18, -18; f) 2500, - 2500; g) – 1286, 1286; h) -125, 125.

2.2.2 $<$; $<$; $>$; $<$; $>$; $<$; $>$; $>$.

2.2.3 A) –34, -26, -24, -18, -16, -5; B) –26, -16, -14, -13, -5, 12, 15; C) –32, -23, -12, 0, 4, 23, 34; D) - 50, -15, 4, 5, 6, 32.

2.2.4 12, 7, 0, 21, 8, 325.

2.2.5 11, 32, 36.

2.2.6 $<$; $>$; $<$; $<$; $=$.

2.2.7 19, -54, 0, 7, 8, -24, 26, -9.

2.2.8 **Cerradura.** La suma de dos números enteros es otro entero. Si $a, b \in Z$, y $a + b = c$, entonces $c \in Z$.
Conmutativa. En la adición de números enteros, los sumandos pueden intercambiarse sin alterar el resultado. $a + b = b + a$; $a, b \in Z$.
Asociativa. En adiciones con tres o más sumandos enteros, el número de sumandos puede reducirse y el total no se altera. $(a + b) + c = a + (b + c)$
Elemento Neutro. Siempre que se tenga una adición de números enteros en donde uno de los sumandos es cero, entonces el total es igual al otro sumando. $0 + a = a + 0 = a$
Cancelación. Si en ambos miembros de una igualdad aparece el mismo sumando, este puede ser cancelado. $a + c = b + c \Rightarrow a = b$.

2.2.9 –7; - 35; - 42; - 22; 0; - 7; 39; - 20; - 1093; - 1011.

2.2.10 –3 ; 314; 8; - 21; 16; $3x + 1$; $9x + 12y$; $5x + 21$; 0; 37.

2.2.11 10; 37; 4; 60; 147; 18; $a - x - m + n$; $b + c + m - n$.

2.2.12 – 40; 48; - 90; 120; 0; 15; mn; - xy; - 6x; mnx; 40; - 6.

2.2.13 - 5; - 4; 3; 4; 0; m/x; - 5/n; - 4; 0; no definido.

2.2.14 9; - 8; 10000; 1024; 16; 1; - 1; - 4; - y^3; - x^5; y^8z^8; m^3n^3 .

2.2.15 A) 2; B) 10; C) cerradura; D) conmutativa; E) asociativa; F) 0; G) 1; H) – *a*; I) 7; J) cerradura; K) conmutativa; L) distributiva; M) simétricos.

2.2.16 1. 2^6; 2. 7 x 13; 3. 2^5 x 5; 4. 2^3 x 3 x 17; 5. 7^4.

2.2.17 14; 18; 12; 20; 80; 36.

2.2.18 15; 4; 3; 11; 16; 8.

2.3.1 23/5; 35/4; 33/5; 37/7; 3/2; -5/1; 8/1.

2.3.2 10 ½ ; $9\,{}^{3}/_{2}$; $7\,{}^{2}/_{3}$; $4\,{}^{5}/_{6}$; 14 ¼ ; 2.

2.3.3 $0.\overline{285714}$; $3.\overline{33}$; 0.6; 0.6; $1.\overline{66}$; 0.625.

2.3.5 Los resultados pueden variar. 1. 2/3 = 4/6 = 6/9 = 8/12 = 10/15;
2. 4/5 = 8/10 = 12/15 = 16/20 = 20/25;
3. 5/2 = 10/4 = 15/6 = 20/8 = 25/10;
4. 5/4 = 10/8 = 15/12 = 20/16 = 25/20;
5. 7/6 = 14/12 = 21/18 = 28/24 = 35/30;
6. 2/1 = 4/2 = 6/3 = 8/4 = 10/5.

2.3.6 5/6; 2/3; 5/18; 3/5; 1/6; 9/5; 9/2; 7/13; 6/7; 5/7.

2.3.7 14/1; - 7/1; 21/5; 3/2; - ½; - 3/100; - 17/25; 15/2.

2.3.8 A. $<$; B. $<$; C. $>$; D. $>$; E. $<$; F. $<$; G. $>$; H. $<$; I. $>$; J. $<$; K. $>$; L. $>$; M. $<$; N. $<$; O. $<$.

2.3.9 1. – 1/5; 2. – 8/7; 3. – 3/8; 4. – 29/35; 5. – 11/18; 6. 50; 7. ¾; 8. – 5; 9. – 3; 10. – 6.25; 11. – 5/4; 12. 2/4; 13. – ¾; 14. 4.94; 15. 1/8; 16. – 7/30.

2.3.10 1. – 36; 2. – 3/2; 3. 0; 4. 5/54; 5. 12.6; 6. mx/ny; 7. – 16; 8. – 6; 9. 6/35; 10. 98; 11. – 2/45; 12. 10/189; 13. – 1; 14. – 5/784; 15. 1; 16. 1.

2.3.11 n/m; ¼; - 2; 3; 4y; - 1/10; 2/5; - 8a; q/p; 3b/2a; - 12/31; - 3x/4y.

2.3.12 9/8; 7/4; 8/15; 9/20; no definido; 0; 3/2; - 4/9; - ½; - 9; 1/8.

2.3.13 1/16; 1/32; m^3/a^3; x^5y^5/m^5; 125/ 216; 676/25; 121/100; $a^4m^4x^4$; $b^nc^nd^ne^n$; $a^4b^4/625c^4d^4$.

2.3.14 1. Propiedad conmutativa de la adición; 2. distributiva de la adición; 3. inverso aditivo; 4. distributiva de la adición; 5. conmutativa de la adición; 6. asociativa de la multiplicación; 7. asociativa de la adición; 8. inverso aditivo; 9. inverso multiplicativo; 10. conmutativa de la multiplicación; 11. asociativa de la multiplicación; 12. elemento neutro de la multiplicación; 13. conmutativa de la adición; 14. elemento neutro de la adición; 15. inverso multiplicativo.

2.3.15 1. 100 botellas; 2. $8^7/_{30}$ = 247/30 km; 3. 9 m; 4. $365; 5. $18000; 6. 1 ¼ = 5/4 m; 7. $36.50; 8. 24000 botellas; 9. $11^5/_6$ = 71/6 lt; 10. $8^1/_8$ = 65/8.

2.4.1 racional; irracional; irracional; racional; irracional; irracional; irracional; racional; racional; irracional; racional; racional; racional; racional; racional; racional.

2.4.2 $x^{2/2} = x$; $x^{6/3} = x^2$; $x^{1/3}$; $x^{3/2}$; $x^{1/4}$; $x^{2/3}$; $x^{2/4} = x^{1/2}$; $x^{3/4}$.

2.4.3 $\sqrt{x}$; $\sqrt[3]{x^2}$; $\sqrt[7]{x^3}$; $\sqrt[3]{x}$; $\sqrt[9]{x^2}$; $\sqrt[4]{x}$; $\sqrt[5]{x^3}$; $\sqrt[8]{x^3}$; $\sqrt[5]{x}$; $\sqrt[5]{x^4}$.

2.4.4 1. $2\sqrt{5}$; 2. $x\sqrt{3}$; 3. $t\sqrt{29}$; 4. $3x$; 5. $5a\sqrt{5}$; 6. $2x + 2$;

7. $3\sqrt{3}$; 8. $\sqrt[3]{2}$; 9. -2; 10. $n\sqrt[3]{m}$; 11. $2a\sqrt[3]{2a}$; 12. ab.

2.4.5 1. $5\sqrt{5}$; 2. $-19\sqrt{2x}$; 3. $-\sqrt{xy}$; 4. $-7x\sqrt{x}$; 5. $35\sqrt{2}$;

6. $13\sqrt{2}$; 7. $3\sqrt{3}$; 8. $-24\sqrt{2}$; 9. $-6\sqrt{3}$; 10. $(2 + 9x)\sqrt{x}$;

11. $(3 - 2x)\sqrt{3}$; 12. $5\sqrt{3}$; 13. $57\sqrt{3}$; 14. $4\sqrt{2}$.

2.4.6 1. 4; 2. $x\sqrt{y}$; 3. $10a^2$; 4. $x^2\sqrt{2}$; 5. $6xy^2\sqrt{x}$; 6. $\sqrt{x^2 - 3x}$;

7. $\sqrt{x^2 + x - 12}$; 8. $30x^2\sqrt{3}$; 9. $105\sqrt{5}$; 10. $2\sqrt[3]{3}$;

11. $2\sqrt[3]{25}$; 12. $3\sqrt[3]{3}$.

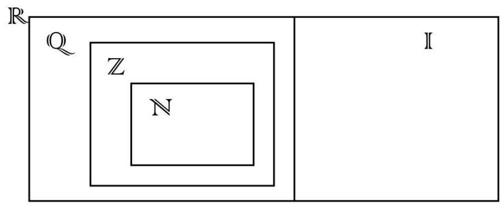
2.4.7 1. $4y^2/x^2$; 2. $2x^2\sqrt{y}$; 3. $xy^2/2$; 4. $5\sqrt{x}$; 5. $x^2/5$; 6. 3; 7. $\sqrt{5}$;

8. $3xy^2\sqrt{x}$; 9. 2; 10. 7/2.

2.4.8 5; $3\sqrt{3}$; $2\sqrt[3]{2}$; $3\sqrt[3]{12}$; $\sqrt[3]{225}$.

2.4.9 $\sqrt[4]{4}$; 2; $\sqrt[6]{3}$; $2\sqrt[6]{4}$; $\sqrt[12]{7}$; 3.

2.4.10 $\sqrt{7}/7$; $3\sqrt{2}/2$; $36\sqrt{2}/32$; $\sqrt{2}/4$; $\sqrt{3}/9$; $\sqrt{x}$; $9\sqrt{x}$; $2\sqrt{5z}$.

2.5.1 

2.5.2 1. Propiedad conmutativa de la adición; 2. elemento neutro aditivo; 3. inverso aditivo; 4. asociativa de la adición; 5. elemento neutro multiplicativo; 6. conmutativa de la multiplicación; 7. asociativa de la multiplicación; 8. inverso multiplicativo.

2.5.3 3; 0; - 20; 40; - 30; - 12; - 4; 4.

2.5.4 a^7b^3; $a^8b^6c^4$; x^{11}; a^{12}; $1/a^4$; 1; a^7; a^4y.

2.5.5 d); c); √5; b); 64; e); – 1; 4.

2.5.7 c; c; d; b.

2.5.8 1. 3.46×10^2; 2. 1.25×10^{-3}; 3. 4.62×10^{-5}; 4. 3.8×10^4; 5. 2.7×10^{-3}; 6. 4.62×10^{-1}; 7. 1.25×10^7; 8. 4.8×10^7; 9. 3.5×10^6; 10. 6.5×10^{-4}; 11. 4.62×10^8; 12. 4.9×10^3; 13. 2.3×10^{-1}; 14. 8.5×10^{-7}.

2.5.9 1. 3.6×10^{14}; 2. 2×10^{-5}; 3. 5.76×10^{10}; 4. 3×10^{-8}; 5. 7.5×10^{10}; 6. 3×10^{-6}; 7. 6×10^{-11}; 8. 3.16×10^7; 9. 6.11×10^5; 10. 1.495×10^8.

3.1.1 1. 2a; 2. 2a + 7; 3. a – b; 4. $a^2 - b^2$; 5. $3a^3$; 6. a – 6; 7. 3x+12; 8. a/b; 9. ab; 10. √b; 11. 2(a – b); 12. $4(x^2 - y^2)$; 13. $(\frac{1}{2} x)^3$; 14. x/2; 15. 5m – 3; 16. 2y + 2; 17. ½ a + 2; 18. 2b + 3.5; 19. 2x – 9; 20. 4n + 2.

3.1.2 1. El triple de un número; 2. El producto de un número por el cuadrado de otro; 3. La suma de dos números; 4. La diferencia de dos números; 5. La suma del cubo de dos números; 6. El triple de la suma de dos números; 7. El cociente de dos números; 8. Diez veces el producto de dos números; 9. El producto de dos números disminuido en cinco; 10. El cubo de la suma de dos números.

3.1.3 C.N.: -4; 8; -3/4; 1; 1.
P.L.: xy^2; a^2b^3c; p^2b^5; y^{10}; am.
E.P.L.: 1 y 2; 2, 3 y 1; 2 y 5; 10; 1.
Grado: 3; 6; 7; 10; 2.

3.1.4 No es; binomio; no es; monomio; trinomio; no es; trinomio; monomio.

3.1.5

POLINOMIO	COEFICIENTES	GRADO DE CADA TÉRMINO	GRADO DEL POLINOMIO
$-4m^9 + 6m - 1$	-4, 6, -1	9, 1, 0	9
$2x^2y + 5xy^2 - 6y^4$	2, 5, -6	3, 3, 4	4
$x^8y^6 - 2x^6y^6 + 8x^4y^7 - 4xy^8$	1, -2, 8, -4	14, 12, 11, 9	14
$12m^{12} - 8m^{11}n^{10} + 5m^5n^{11} - m^4n^{12} + n^{14}$	12, -8, 5, -1, 1	12, 21, 16, 16, 14	21
$a^5 + 4a^3 - 3a^2 + a$	1, 4, -3, 1	5, 3, 2, 1	5
$m^4n^3 - 3m^3n^2 + 6m^2n^4$	1, -3, 6	7, 5, 6	7

3.1.6 $x^5 + 6x^3 + 2x^2 + x + 1$; $15x^9 + 7x^8 + 5x^3 - x^2 + x$; $-5y^8 - y^7 + 9y^6 + 8y^3 - 7y^2$; $-5x^6 - 2x^3 + 2x^2 + 3x + 3$; $x^2 - 5x^4 + 6x^3 + 9x + 5$.

3.1.7 $m^4 - 2m^3 + 1$; $13m^3 - 9m + 8$; $m^2 - 4m + 1$; $-5m^2 + 9mp$; $-m^3p^4 - 2mp - 4m$; $12m^4 - 2m + ¼$.

3.1.8 $14x + 17$; $11.5y + 10$.

3.1.9 $\pi(r^2 - 4)$; $y^2 - 9$.

3.2.1 1. $-x + 5$; 2. $5x^2 - x + 3$; 3. 0; 4. $-4x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 2x + 4$;
5. $12x^2 - 8x + 6$; 6. $-3cd^4 + 3d^2 + 4cd$; 7. $-2a - 4b + 7c - 4$;
8. $-x^4 - 3x^3 + 4x + 6$; 9. $-4r$; 10. $am - 4mn$; 11. $a + 9b + 4c$;
12. $2a$.

3.2.2 1. $4x^2 + y^2 + 7y - 10$; 2. $3a^3 - 4c^3 - 12b^2$; 3. $-x^2 - 5x + 7y + 18$;
4. $41/24\, x + 1/8\, y$; 5. $1/6\, a + 11/12\, b$; 6. $-4x + 7y - 6xy + 2$;
7. $2b - 2a - 8$; 8. $-x^3 - 6y^3 + 10x^2y - xy^2$; 9. $2x + 2y + 2z$;
10. $-10x$.

3.2.3 $-3x^2 - 15x + 8$; $y^3 - 9y^2 + 13y - 3$; $5a^2 + 3b^2 - 6ab - 6$.

3.2.4 1. $12a^4b^6$; 2. $20m^5b^2$; 3. $-42x^6$; 4. $-24x^8y^6$; 5. $-30a^7b^7$;
6. $1/12\, a^6b^{10}c$; 7. $16w^4v^2$.

3.2.5 1. $4y^5 - 20y^4 + 4y^3 - 4y^2$; 2. $m^4n^4 - 2m^3n^5 + 4m^2n^6 - mn^6 + 4mn^4$;
3. $-2a^6b + 4a^5b^3 + 12a^4b^4$; 4. $7x^6 - 21x^5 - 7x^4 + 14x^3 - 35x^2$;
5. $-8x^4y^3 + 4x^3y^4 - 4x^2y^4 + 20xy^5 + 24xy^3$; 6. $8a - 4b + 20c - 4$;
7. $-4y^5 + 5y^4 - 6y^3$; 8. $-7a^5b + 28a^4b^4 + 21a^2b^4 - 7a^3b + 7a^2b^2$;
9. $7x - 1$; 10. $2x + 9$; 11. $8x - 18$; 12. $-6x - 58$.

3.2.6 1. $2x^3 - 11x^2 + 23x - 20$; 2. $4x^2 + 25y^2 - 20xy$; 3. $6x^3 - 23x^2 - 5x + 4$;
4. $30x^3 - 27x^2 + 11x - 2$; 5. $a^3 - b^3$; 6. $8a^3 - b^3$; 7. $a^2 - b^2$;
8. $x^2 + 7x - 18$; 9. $a^4 - 2a^3 + 8a^2 - 10a + 15$; 10. $12x^3 - 49x^2 + 35x + 12$.

3.2.7 1. $3x^4y^4$; 2. $-6a^2/c^3$; 3. $-5a^3b^6c^3$; 4. $-3y/x^2$; 5. $2a^4b^4/c$;
6. $9x^2/y$; 7. $7x^3/y$; 8. $-9x^2y$; 9. $3a + 1/(2a) - 1$;
10. $-3x^2 + 2xy + 4y^2$; 11. $3x^4y^2 - 2x^2y - y^4$; 12. $x - 3$.

3.2.8 A. $(x - 6)$; B. $(4x^2 – 13x + 29) + (-60) / (4x^3 - 5x^2 + 3x – 2)$;
C. $2x + 2y$; D. $4x – 5y$; E. $(x^2 – 2x + 4) + (-12)/(4x^3 + 10x – 5x^2 + 6)$.

3.3.1 1. $4b^2 – 49$; 2. $9x^2 – 25$; 3. $49w^2 – 4a^2$; 4. $y^2 – 64$; 5. $1 – a^2$;
6. $a^2 + 12a + 36$; 7. $n^2 – 10n + 25$; 8. $9a^2 + b^2 + 6ab$;
9. $25a^2 – 20ab + 4b^2$; 10. $a^2 – 2a + 1$; 11. $49x^2 + 28x + 4y^2$;
12. $x^2 + 11x + 24$; 13. $y^2 + 6y –27$; 14. $a^2 – 4a – 45$;
15. $b^2 – 8b + 7$; 16. $n^3 + 6n^2 + 12n + 8$; 17. $y^3 – 9y^2 + 27y – 27$;
18. $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$; 19. $27x^3 – 135x^2 + 225x – 125$;
20. $27x^3 – 27x^2y + 9xy^2 – y^3$; 21. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$;
22. $25x^2 + 40x + 12$.

3.4.1 1. $5ab(4b – 3a^2)$; 2. $m(m^4 – 2m + 6)$; 3. $18xy^2(2ax^2y^3 + 3xy – 1)$;
4. $14x^2(4ax^3 – y^2 – 2x)$; 5. $x^2(-7x^2 - 8x + 1)$;
6. $7m^2n(5 – 6m^2n + 3mn^2)$; 7. $x(a + b)$; 8. $2(a – 4b)$; 9. $b(b + 3)$;
10. $3y(2x – y)$; 11. $(x + 2)(a + b)$; 12. $(y – 3)(2 – y)$;
13. $(b – 6)(5x – 4)$; 14. $(n + 6)(a + 1)$; 15. $(c + 1)(x – 1)$.

3.4.2 1. $(y + 9)(y – 9)$; 2. $(b + 1)(b – 1)$; 3. $(10 + w)(10 – w)$;
4. $(2a + 1)(2a – 1)$; 5. $a(x + 4)(x – 4)$; 6. $b(x + 1)(x – 1)$;
7. $(8z + 9)(8z – 9)$; 8. $(2 – 7ab)(2 + 7ab)$; 9. $(x + y)(x – y)(x + 3)$;
10. $(a + 3)(a – 3)(a + 1)(a – 1)$; 11. $(a + b)(a – b)(1 + x)(1 – x)$;
12. $a(a + 1)(a – 1)$.

3.4.3 1. $(2x – y)^2$; 2. $(7x – 3y)^2$; 3. No es; 4. $(5a + 4b)^2$; 5. No es;
6. No es; 7. $(x – 6y)$; 8. No es; 9. No es; 10. $(a + 7)^2$;
11. $(pq^2 – r)^2$; 12. $(4x – 5y)$.

3.4.4 1. $(6x – 1)(x – 3)$; 2. $(2y – 3)(y + 3)$; 3. $(2a – 1)(a – 2)$;
4. $(2x + 3)(x + 1)$; 5. $(2x – 3)(x + 1)$; 6. $(4x + 1)(2x – 3)$;
7. $(2x – 3)(2x – 1)$; 8. $(3x + 5)(x + 2)$; 9. $(4y – 3)(3y + 5)$;
10. $(3x + 5)(x + 5)$; 11. $(7x – 2)(x – 1)$; 12. $(6x + 1)(x - 4)$;
13. $(2x – 3)(2x – 7)$; 14. $(3x – 7)(x + 2)$; 15. $(5x + 1)(x – 6)$.

3.4.5 1. $(x – 3)(x^2 + 3x + 9)$; 2. $(a + 4)(a^2 – 4a + 16)$; 3. $(1 – y)(1 + y + y^2)$;
4. $(n + 5)(n^2 – 5n + 25)$; 5. $(2a – 6b)(4a^2 + 12ab + 36b^2)$;
6. $(4y – 1)(16y^2 + 4y + 1)$; 7. $(3 – 5y^2)(9 + 15y^2 + 25y^4)$;
8. $(2b^2 – 6)(4b^4 + 12b^2 + 36)$.

3.4.6 A. $z(r – s)$; B. $2z^2(z + 4)(z – 4)$; C. $x(2 – x)(x – 1)^2$;
D. $(t + u + 3)(t – u + 3)$; E. $(x – 3y)(a + 2b)$; F. $(3a - 2)(b + x)$;
G. $(r + 6)^2$; H. $(a – 4)^2$.

3.5.1 1. $5y^3/6x$; 2. $– 3b^2/5a^2c$; 3. $b^3/3x^2d$; 4. $1/2a^6c$; 5. $– 1/3$;
6. $– ½$; 7. $(x – 4)/(x – 5)$; 8. $(x – 2)/3$; 9. $x + 3$;
10. $(x^2 + 2x + 4)/(x + 2)$; 11. $(x + 1)/(x + 4)$; 12. $(x + y)/(n – m)$.

3.5.2 1. $½ (x – y)$; 2. $(y + 3)/(y^3 + 3y)$; 3. $1/(2a)$; 4. $(m – n)/(n – m^2)$;
5. $– 1$; 6. $a(a – b)/x(x – 4)$.

3.5.3 1. 2; 2. $63(2 – x)/90x(x + 2)$; 3. $2/(x – 2)$; 4. $2/(2 – a)$; 5. $5/b$;
6. $– a/x$; 7. $– y$.

3.5.4 A. $12m^2n^5xy$; B. $15p^2qrs$; C. $60x^6y^8z^4$; D. $12a(a + 2)(a - 2)$;
E. $6a^2(3a + 1)(3a - 1)$; F. $(x + 2y)(2x + y)(3x – y)$.

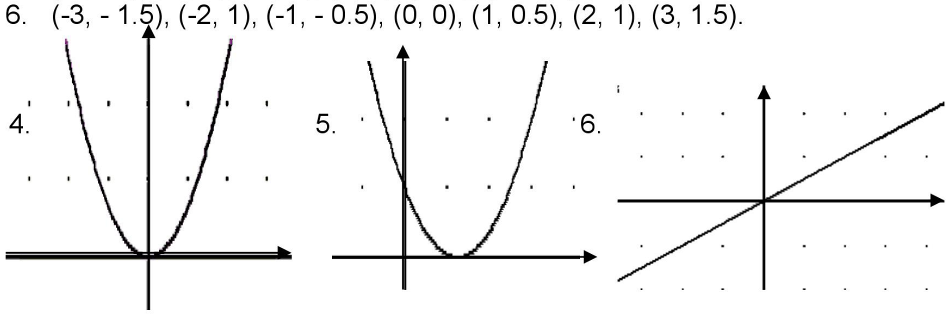
3.5.5 1. $(5x + 7)/x^2$; 2. $2/(x - 4)$; 3. 6; 4. 2; 5. – 2; 6. a;
7. $– 31/(15x^2)$; 8. $(11y – 24)/ 14$; 9. 11/8; 10. $(9x + 14)/x(x+2)$;
11. $– (7x – 1)/3(x – 4)$; 12. $(2a^3 – 4a^2 + 3a – 1)/(a^2 + 1)$;
13. $(2x^2 + x – 25)$; 14. $4/(x – 3)$.

3.5.6 1. 2 días; 2. 30 horas; 3. 12/7 días; 4. 30 minutos; 5. 12 hrs.

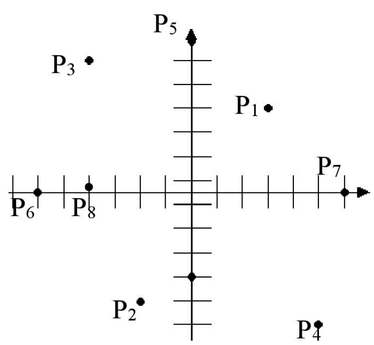
3.5.7 1. 1/8; 2. $(4 + x)/(4 – x)$; 3. $(3 – x)/(3 + x)$; 4. $(5 + x)/(6 – 4x)$;
5. $(1 – x)/(5x – 2)$; 6. $(3x – 10)(x + 2)/(2x + 3)(x – 2)$; 7. $1 – y$;
8. $(2m^2 – m)/(m^2 – m)$.

Matematicas II

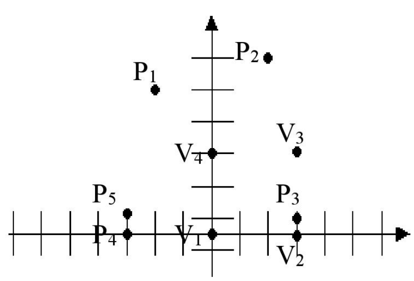
4.1.1 1. (1, 2), (1, 4), (1, 6), (1, 8), (1, 10), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (3, 8), (3, 10), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (5, 8), (5, 10);
2. (2, 1200), (5, 3000), (3, 1800), (0, 0);
3. (1, 8100), (2, 7200), (3, 6300), (4, 5400), (5, 4500), (6, 3600), (7, 2700), (8, 1800), (9, 900), (10, 0);
4. (-3, 9), (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9);
5. (-3, 16), (-2, 9), (-1, 4), (0, 1), (1, 0), (2, 1), (3, 4);
6. (-3, - 1.5), (-2, 1), (-1, - 0.5), (0, 0), (1, 0.5), (2, 1), (3, 1.5).



4.1.2



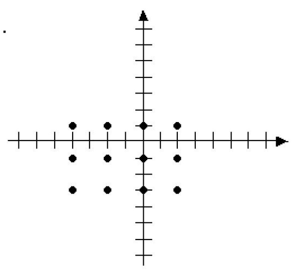
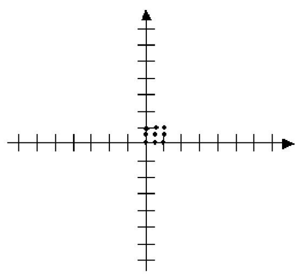
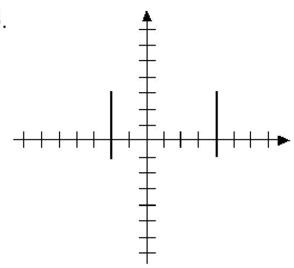
4.1.3 $P_1 = (-2, 5)$; $P_2 = (2, 6)$; $P_3 = (3, 1)$; $P_4 = (-3, 0)$; $P_5 = (-3, 1)$;
$V_1 = (0, 0)$; $V_2 = (3, 0)$; $V_3 = (3, 3)$; $V_4 = (0, 3)$.

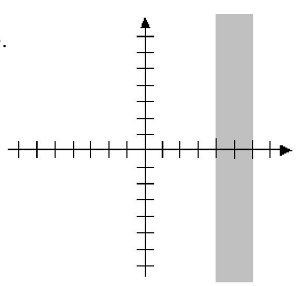
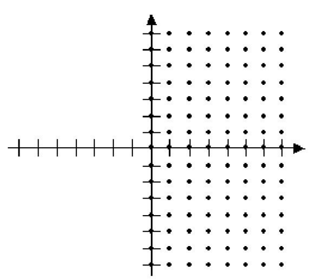
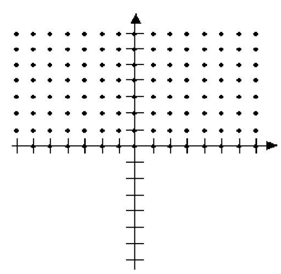


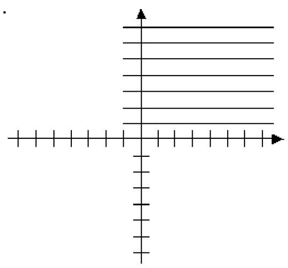
4.1.4 1. Que la ordenada y la abscisa sean positivas;
2. Que la ordenada sea positiva y la abscisa negativa;
3. Que la ordenada y la abscisa sean negativas;
4. Que la abscisa sea positiva y la ordenada negativa;
5. Cero; 6. Cero; 7. (0, 0).

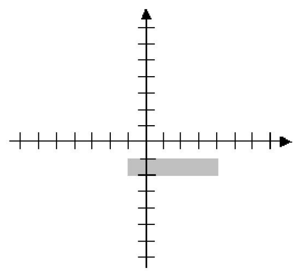
4.1.5 1. {(rojo, amarillo), (rojo, café), (rojo, morado), (azul, amarillo), (azul, café), (azul, morado), (verde, amarillo), (verde, café), (verde, morado)};
2. $\{(x, x^2), (x, z^2), (x, y^2), (y, x^2), (y, z^2), (y, y^2), (z, x^2), (z, z^2), (z, y^2)\}$;
3. {(1, a), (1, c), (2, a), (2, c), (3, a), (3, c)};
4. M x N = {(q, a), (q, b), (q, c), (r, a), (r, b), (r, c), (s, a), (s, b), (s, c), (t, a), (t, b), (t, c)} ,
N x M = {(a, q), (a, r), (a, s), (a, t), (b, q), (b, r), (b, s), (b, t), (c, q), (c, r), (c, s), (c, t)};
5. F, F, V; 6. {(1, c), (1, t), (2, c), (2, t), (3, c), (3, t)}.

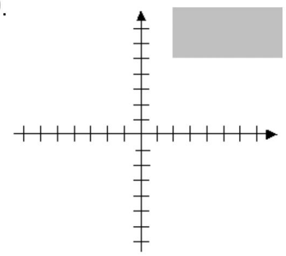
4.1.6 1. S x T = {(-4, -3), (-4, -1), (-4, 1), (-2, -3), (-2, -1), (-2, 1), (0, -3), (0, -1), (0, 1), (2, -3), (2, -1), (2, 1)};
2. M x M = {(0, 0), (0, ½), (0, 1), (½, 0), (½ , ½), (½ , 1), (1, 0), (1, ½), (1, 1)};
3. A x B = $\{(-2, x \mid -1 \leq x \leq 3, x \in \mathbf{R}), (4, x \mid -1 \leq x \leq 3, x \in \mathbf{R})\}$;

1.

2.

3.


4.

5.

6.


7. 

8. 

9. 

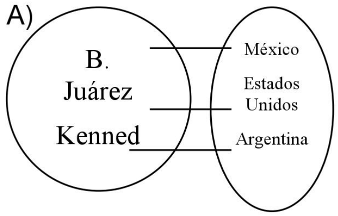
4.1.7 a; c; d; b; c; c; d; d; c; a.

4.2.1 1. a) {(México, América), (Guatemala, América), (Estados Unidos, América), (Italia, Europa) };
b) {(Europa, América) };
c) {(Guatemala, México), (Guatemala, Italia), (Guatemala, Estados Unidos), (Italia, México), (Italia, Estados Unidos), (México, Estados Unidos)};
d) {(América, Italia), (Europa, México), (Europa, Guatemala), (Europa, Estados Unidos)}
e) {(Guatemala, México), (México, Guatemala), (México, Estados Unidos)};
f) {(México, Guatemala), (México, Italia), (Italia, Guatemala), (Estados Unidos, México), (Estados Unidos, Guatemala), (Estados Unidos, Italia), (América, México), (América, Guatemala), (América, Italia), (América, Estados Unidos), (América, Europa), (Europa, Guatemala), (Europa, Italia)};
2. {(Descubrimiento de América, Independencia de México), (Descubrimiento de América, Porfiriato), (Independencia de México, Porfiriato)};
3. {(2, 4), (2, 6), (2, 8), (2, 10), (4, 6), (4, 8), (4, 10), (6, 8), (6, 10), (8, 10)}.

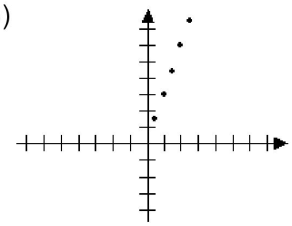
4.2.2 1. {(0, 8), (1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (7, 1), (8, 0)}, $D_R = I_R = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$;
2. {(0, 0), (1, 1), (1, -1), (4, 2), (4, -2), (9, 3), (9, -3)}, $D_R = \{0, 1, 4, 9\}$, $I_R = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$;
3. {(-4, 8), (-3, 6), (-2, 4), (- 1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 4), (3, 6)}, $D_R = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $I_R = \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

4.2.3 A) $R = \{(x, y) \mid x$ fue presidente de $y\}$, D_R = {B. Juárez, Kennedy, Perón}, I_R = {México, Estados Unidos, Argentina}
B) $R_1 = \{ (x, y) \mid y = 3x\}$, $D_{R1} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $I_{R1} = \{3, 6, 9, 12, 15\}$;
C) $R_2 = \{ (x, y) \mid x = 2y\}$, $D_{R2} = \{4, 8, 12, 16\}$, $I_{R2} = \{2, 4, 6, 8\}$;
D) $R_3 = \{ (x, y) \mid y = x - 1\}$, $D_{R3} = \{4, 6, 8\}$, $I_{R3} = \{3, 5, 7\}$;
E) $R_4 = \{ (x, y) \mid x = \sqrt{y}\}$, $D_{R4} = \{2, -2, 3, -3\}$, $I_{R4} = \{4, 9\}$;
F) $R_5 = \{ (x, y) \mid y = \lvert x \rvert \}$, $D_{R5} = \{-2, -1, 1, 2\}$, $I_{R5} = \{1, 2\}$;

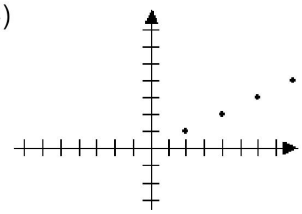
A)



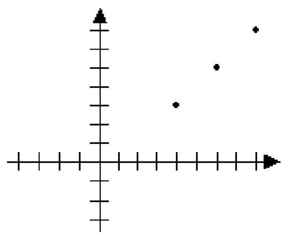
B)



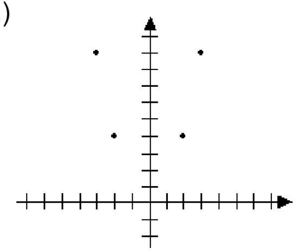
C)



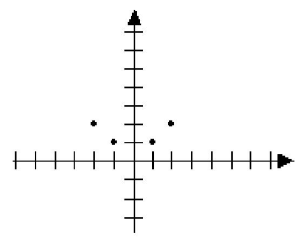
D)



E)

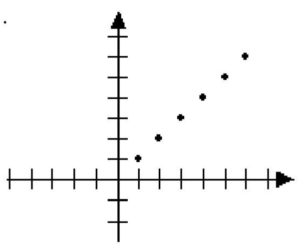


F)

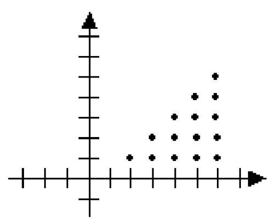


4.2.4 1. R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)}; 2. {(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1),(4, 2),(4, 3),(5, 1),(5, 2),(5, 3), (5, 4), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)};
3. $\{(1, y) \mid -1 \leq y \leq 2,\ y \in \mathbf{R}\}$; 4. {(4, -3), (5, -3), (6, -3)};
5. $\{(1, y), (2, y), (3, y), (4, y) \mid y < x + 1,\ y \in \mathbf{R}\}$;

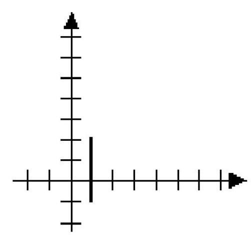
1.



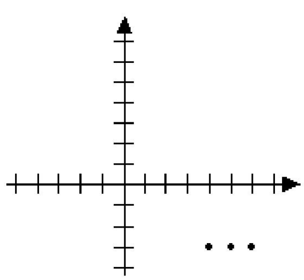
2.



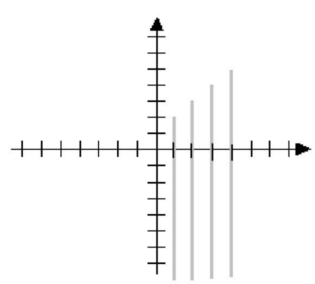
3.



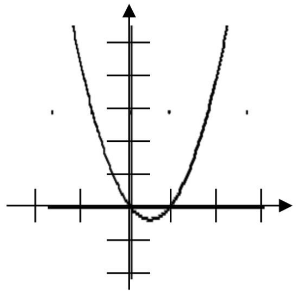
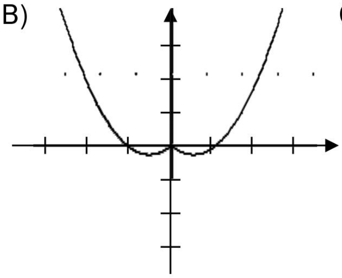
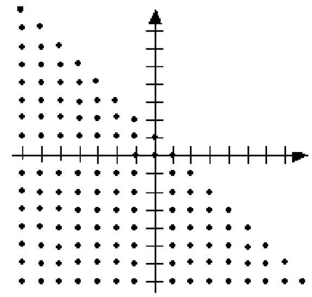
4.



5.



4.2.5 A) $\{y \in \mathbf{R} \mid y \geq -0.25\}$; B) $\{y \in \mathbf{R} \mid y \geq -0.25\}$; C) $\mathbf{Z}$;

A)  B)  C) 

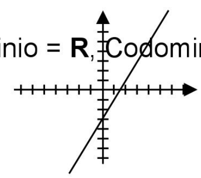
4.2.6 A. $R = \{(-3, -3), (-3, 3), (-2, -2), (-2, 2), (-1, -1), (-1, 1), (0, 0), (1, -1), (1, 1), (2, -2), (2, 2), (3, -3), (3, 3)\}$, $D_R = I_R = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$;
B. $R = \{(x, y) \mid y = \pm x\}$, $D_R = I_R = \mathbf{R}$.

4.2.7 1. Función, $D_f = \{1, 2, 3, 4\}$, $I_f = \{3, 5, 9, 10\}$; 2. Relación, $D_r = \{-2, 5\}$, $I_r = \{0, -5, -2\}$; 3. Función, $D_f = \{-2, -1, 0, 4, 5, 6\}$, $I_f = \{-2, -1, 0, 4, 5, 6\}$;
4. Relación, $D_r = \{-1\}$, $I_r = \{0, 3, 10\}$; 5. Función, $D_f = I_f = \mathbf{R}$;
6. Relación, $D_r = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$, $I_r = \{ y \in \mathbf{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$;
7. Relación, $D_r = I_r = \mathbf{R}$.

4.2.8

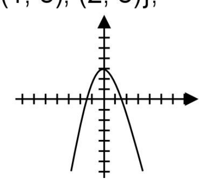
x	- 2	- 1	0	1	2
y	- 7	- 5	- 3	-1	1

Función; Función; Relación; Función; Relación; Función; Relación; Función.

4.2.9 1.  Dominio = $\mathbf{R}$, Codominio = $\mathbf{R}$;

2. a) $f(0) = 2$, $f(-1) = -1$; b) $\{(-2, -4), (-1, -1), (0, 2), (1, 5), (2, 8)\}$;
c) $\{ -4, -1, 2, 5, 8\}$;
3.

x	-3	- 2	-1	0	1	2	3
y	- 6	- 1	2	3	2	- 1	- 6



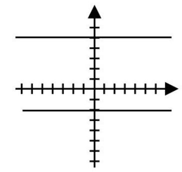
Dominio = $\mathbf{R}$, Imagen = $\{y \in \mathbf{R} \mid y < 3\}$;

4.3.1 1. $D_f = \mathbf{N}$, $C_f = \mathbf{N}$, $I_f = \{2\}$, C. Ninguna de ellas; 2. $D_f = \{1, 2, 3\}$, $C_f = \mathbf{R}$, $I_f = \{0, 5, 6\}$, C. Inyectiva; 3. $D_f = \{0, 4, 8\}$, $C_f = \{1, 2\}$, $I_f = \{1, 2\}$, C. Sobreyectiva; 4. $D_f = \mathbf{R}$, $C_f = \mathbf{R}$, $I_f = \mathbf{R}^+$, C. Ninguna de ellas;
5. $D_f = \mathbf{R}$, $C_f = \mathbf{R}$, $I_f = \{y \in \mathbf{R} \mid y \leq 2\}$, C. Ninguna de ellas;
6. $D_f = \{5, 15, 25\}$, $C_f = \{-1, -2, -3\}$, $I_f = \{-1, -2, -3\}$, C. Biyectiva;
7. $D_f = \{w, x, y\}$, $C_f = \{m, n\}$, $I_f = \{m, n\}$, C. Sobreyectiva;
8. $D_f = \{s, t\}$, $C_f = \{4, 8, 12\}$, $I_f = \{4\}$, C. Ninguna de ellas;
9. $D_f = \{1, 2, 3, 4\}$, $C_f = \{a, e, i, o, u\}$, $I_f = \{a, e, u, o\}$, C. Inyectiva.

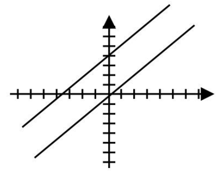
4.3.2 inyectiva; biyectiva; biyectiva; sobreyectiva; sobreyectiva.

4.4.1 algebraica; trascendente; algebraica; trascendente; trascendente; algebraica; trascendente; algebraica.

4.4.2 1. $D_f = \mathbf{R}$, $I_f = \{5\}$; 2. $D_f = \mathbf{R}$, $I_f = \{-2\}$;
No son inyectivas ni sobreyectivas.
Por lo tanto no son biyectivas.



4.4.3 1. $D_f = \mathbf{R}$, $I_f = \mathbf{R}$; 2. $D_f = \mathbf{R}$, $I_f = \mathbf{R}$;
Son inyectivas y sobreyectivas.
Por lo tanto, son biyectivas.



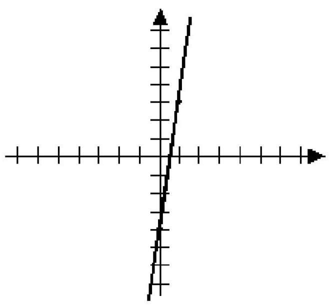
4.4.4 4; 1; 6/5; - 9; - 2.

4.4.5 1. $y = 2x - 2$; 2. $y = -\frac{1}{2}x$; 3. $y = (\sqrt{2})x + 1$; 4. $x - 5$; 5. $\frac{1}{4}x + 4$.

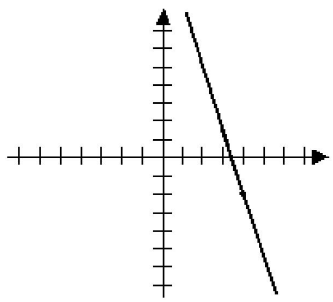
4.4.6 A. $m = 3$, $b = -2$, creciente; B. $m = \frac{1}{2}$, $b = 1$, creciente; C. $m = -2$, $b = 2$, decreciente; D. $m = 1$, $b = 3$, creciente; E. $m = -2$, $b = -6$, decreciente; F. $m = 3$, $b = -2$, creciente.

4.4.7 a) $y = 7x - 4$, creciente; b) $y = -3x + 10$, decreciente; c) $y = -1$; d) $y = (x - 2)/3$, creciente; e) $y = \frac{1}{2}x$, creciente;

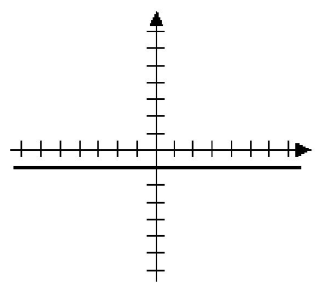
a)



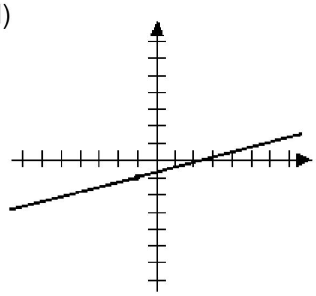
b)



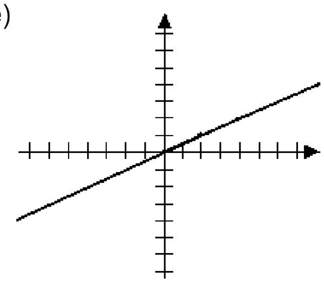
c)



d)



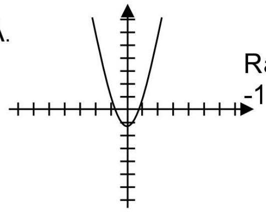
e)



4.4.8 c; c; a; d; b; a; d.

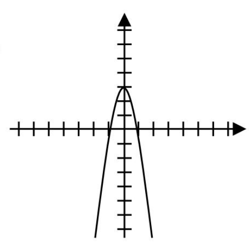
4.4.9

A.



Raíces:
-1 y 1

B.



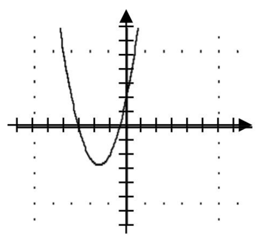
Raíces:
- 1 y 1

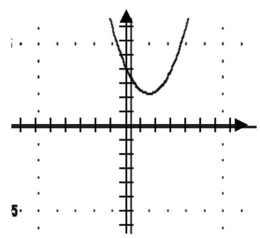
4.4.10 ± 4; ± 2; ± 5; $\pm a$.

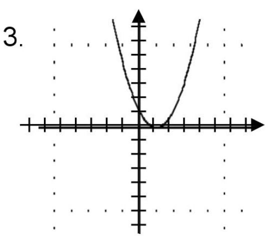
4.4.11 A. 2, -1; B. 5/2, - 2; C. – 1/3, - 3/2; D. 3/2, 1/9; E. – 2/3, ¼ ;
F. a, - b.

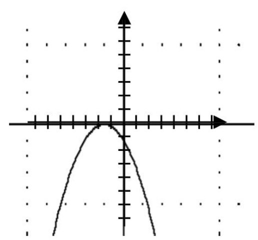
4.4.12 1. – 2, -4; 2. – 4; 3. 3/2; 4. $(-1 \pm\sqrt{-3})/2$; 5. –1, ½ .

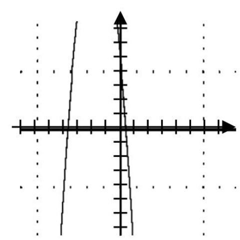
4.4.13 1. d = 20, tiene dos raíces reales; 2. d = -8, no tiene raíces reales;
3. d = 0, tiene una sola raíz real; 4. d = 0, una raíz real; 5. d = 216.

1.


2.


3.


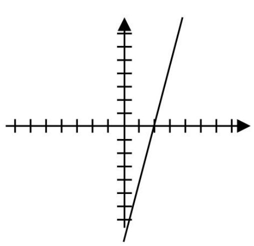
4.


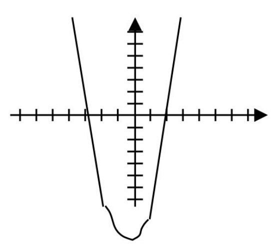
5.


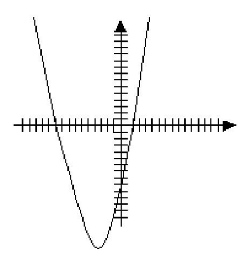
4.4.14 4; 3; 5; 1; 0; 6.

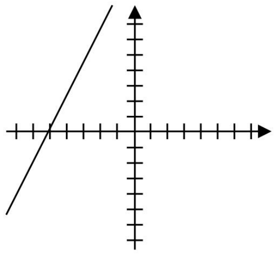
4.4.15 1. $2x^2 - 9x + 12$, - 11; 2. $x^2 + x - 7$, -3; 3. $4x^2 - 8x + 25$, 0;
4. $2x^3 + x^2 - 3x + 10$, - 19; 5. $x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x + 6$, 15;
6. $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$, 0.

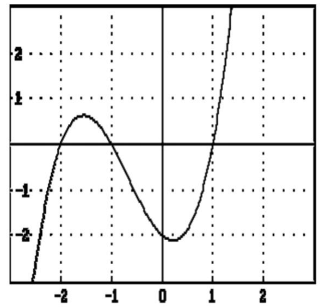
4.4.16 1. 2; 2. 2, - 3; 3. 1, - 10; 4. – 5; 5. –1, 1, -2; 6. 3, -3, 1;
7. 3, - 3, 1, -2; 8. 1, -1, 2, -2; 9. 0, 1, -1, 2, -2; 10. 3, -3, 1, $\pm\sqrt{3}$.

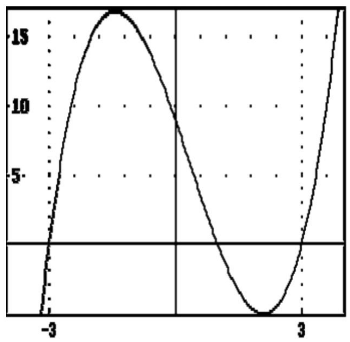
1.


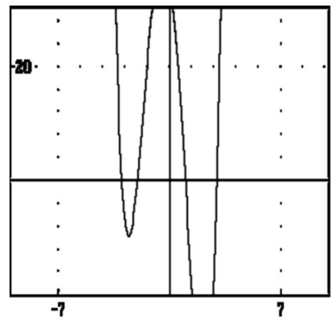
2.


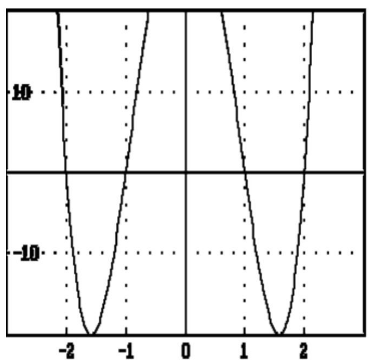
3.


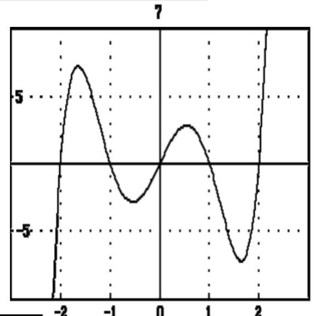
4. 

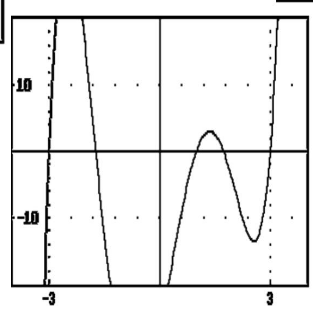
5. 

6. 

7. 

8. 

9. 

10. 

5.1.1 1.

y	1	2	3	π	$\sqrt{3}$	8	40
f(y)	2	4	6	2π	$2\sqrt{3}$	16	80

2.

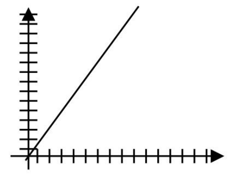
h	1	2	3	4	5	6
d	60	120	180	240	300	360

3.

l	10	12	14	16	18	30
m	40	48	56	64	72	120

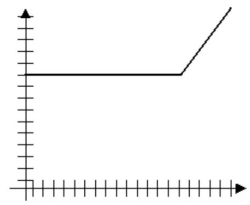
4.

personas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
tiempo	0	1.5	3	4.5	6	7.5	9	10.5	12	13.5	15	16.5	18	19.5	21	22.5



5.

Día	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
consumo	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	23	26	29	31	34



5.1.2 1. d = 60h, vd: d, vi: h, c: 60; 2. C = 70n, vd: C, vi: n, c: 70;
3. t = pk, vd: t, vi: k, c: p; 4. c = 40 – (d/10), vd: c, vi: d, c: 40;
5. P = 2n, vd: P, vi: n, c: 2; 6. f(n) = n + 2, vd: f(n), vi: n, c: 2.

5.2.1 A. 10; B. 5; C. 8; D. 17/14; E. 1/5; F. 3/10; G. 3; H. 20/21;
I. – 6/7; J. 3.

5.2.2 1. 28, 20; 2. 32; 3. 30; 4. 36, 60; 5. 18, 54; 6. 20, 22, 24;
7. 28, 40; 8. 51, 52; 9. 170, 90, 65; 10. 18; 11. 80, 81, 82;
12. 100; 13. 1200 m.

5.3.1 1. x = - 1/3, y = 65/18; 2. x = 2, y = -1; 3. x = 3, y = 4; 4. x =-2, y = 5;
5. w = - ½, z = 1; 6. x = 2, y = 5; 7. x = 8, y = 1; 8. m = - 2, n = 4;
9. s = ½ , t = ¼ ; 10. x = 2, y = 1.

5.3.2 1. $4, $2.5; 2. $10000, $12000; 3. 4000, 8000; 4. 6, 4; 5. 6km/h;
6. 80, 45; 7. 0.991, 1.03; 8. 19, 15; 9. 8, 13; 10. 5 m, 4 m;
11. 96, 84; 12. 38, 22; 13. 42, 22.

5.3.3 A. x = 8, y = -5, z = -2; B. x = 4, y = 3, z = 2; C. x = 1, y = 2, z = -1;
D. x = 4, y = -8, z = -6; E. x = -1, y = -5, z = 0; F. x = 2, y = 6, z = 1.

5.3.4 1. 6, 10, 7; 2. 60 kg, 30 kg, 30 kg; 3. ½, 1/3, 1/6; 4. $2, $4, $6;
5. 11 cm, 11 cm, 11 cm; 6. 3, 4, 5; 7. 3, 4, 5; 8. 282.

5.4.1 A. $-1, 9$; B. $-5, 1$; C. $0, -8$; D. $\pm\sqrt{(-4)} + 1$; E. $(1\pm\sqrt{5})/2$;
F. $4/3$; G. $(\sqrt{7} - \sqrt{3})/2$; H. $(3\sqrt{2} - \sqrt{10})/2$.

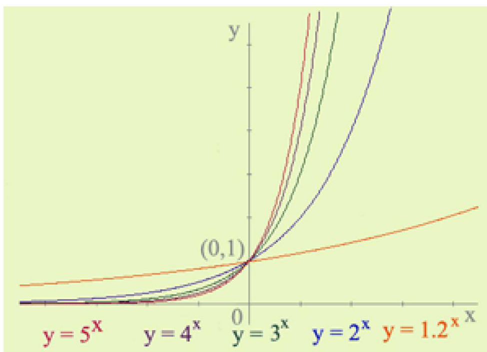
5.4.2 i. – 12, 8; ii. 7; iii. –1, 2; iv. –3, -1; v. $\pm\sqrt{6}$; vi. 5, -17/4.

5.4.3 1. 30; 2. 14 m, 20 m; 3. 6, 7; 4. 8, 11; 5. 10 cm, 12 cm;
6. 38 cm; 7. 5, 6, 7; 8. – 1; 9. 9/10; 10. 9 m, 12 m; 11. – 8;
12. 5 m; 13. 8; 14. 7.

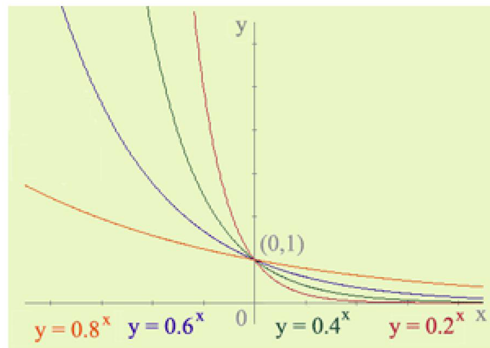
6.1.1 2^5; 3^{-3}; a^9; b^{12}; c^{-2}.

6.1.2 $(3^4 \times 5^5)/2^3$; $ab^{-2}c^{-3}$; $d^{x-y-2}e^{y-zf-xf-z-2}$.

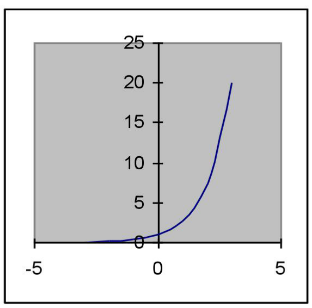
6.1.3
A.



B.



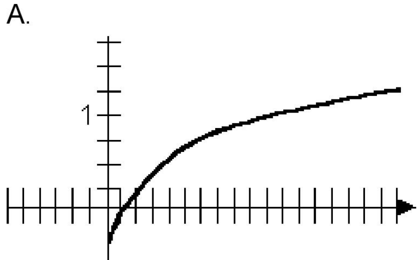
C.



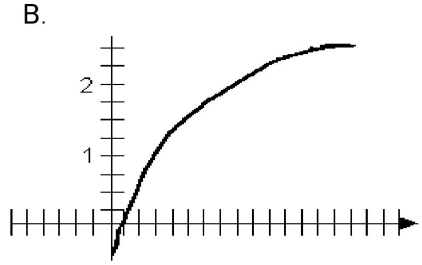
6.1.4 8; 3; 2; 2; 5; 2.

6.1.5 1. $\log_5 3125 = 5$; 2. $\log_4 64 = 3$; 3. $\log_2 32 = x$; 4. $\log_m 8 = n$;
5. $\ln y = 5$; 6. $\ln 7 = x$; 7. $\ln 1 = 0$; 8. $2^4 = 16$; 9. $5^x = 25$;
10. $x^5 = 32$; 11. $e^{1.6} = 5$; 12. $e^2 = x$; 13. $e^x = 17$; 14. $10^{0.6} = 4$.

6.1.6 A.



B.



6.1.7 1. $x = 3$; 2. $x = -3$; 3. $\frac{1}{3}$; 4. $x = 3$; 5. $x = \frac{1}{9}$; 6. $x = 3$;
7. $x = 8$; 8. $x = 2$.

6.1.8 a) $\log_3 (x-2)/(x+2)$; b) $\ln x^3y^2/z^4$; c) 0; d) $\log_{10} x(x+1)^4$;
e) $\log_m y^3 + 1$; f) $\ln [x/(x^2-1)]^2$; g) $\ln 6$.

6.1.9 1. a) 134.3136, b) 0.0001; 2. 1.91; 3. a) 6.7959; b) 6.3×10^{-7};
4. 192000; 5. a) 3.9239, b) 2015; 6. 64.7; 7. 12380.5;
8. a) 13.7439, b) 44.3494.

6.2.1 $\sqrt{24}$; 6.70; 6.40; 5; 3.6; 7.5; 8.9; 8; 9; 8.54.

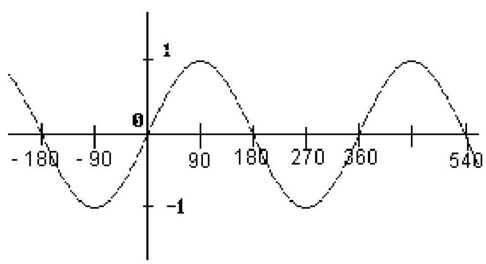
6.2.2 7.5; 0.6; 0.8; 0.75; 1.6667; 1.25; 1.3333.

6.2.3 A. 0.6, 0.8, 0.75; B. 0.5738, 0.8197, 0.7; C. 0.8, 0.6, 1.33;
D. 0.3846, 0.9231, 0.4167; E. $1/\sqrt{2}$, $1/\sqrt{2}$, 1; F. 0.7067, 0.7067, 1.

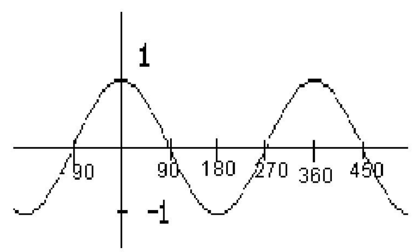
6.2.4

Ángulo	0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º	225º	270º	315º	360º
Seno	0	0.5	.707	.866	1	.866	.707	0.5	0	-0.7	- 1	-0.7	0
Coseno	1	.866	.707	0.5	0	- 0.5	-0.7	-0.8	- 1	-0.7	0	.707	1
Tangente	0	.577	1	1.73	---	- 1.7	- 1	-0.5	0	1	---	- 1	0

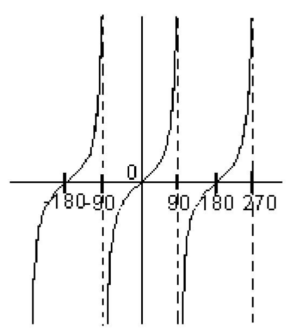
y = sen x



y = cos x



y = tan x



6.2.5 1. a = 8, b = 6; 2. a = 2, b = 4; 3. a = 8, b = 10;
4. b = 3, c = 4.24; 5. b = 2, c = 2.8.

6.2.6 30°; 45°; 60°; 68.2°; 33.75°.

6.2.7 1. 5 cm; 2. 15.62 cm; 3. 30.24°, 59.76°; 4. h = 43.74 cm, l = 54.3, α = 53.6°; 5. 37.32 m; 6. 47°; 7. 5.87 m; 8. 4.8 m; 9. 18 m; 10. 75.38 m.

BIBLIOGRAFÍA

Alarcón, Jesús y otros, *Matemáticas Uno*, Fondo de Cultura Económica, México, 1990.

Almaguer, Bazaldúa, Cantú, Rodríguez, *Matemáticas 1*, Editorial Limusa, Tercera Edición, México, 1996.

Anfossi Agustín, Flores Meyer, *Álgebra*, Editorial Progreso, 22ª edición, México, 1987.

Arquímedes Caballero y otros, *Matemáticas Primer Curso*, Editorial Esfinge, Trigésima Edición, México, 1987.

Baldor, Aurelio, *Álgebra*, Publicaciones Cultural, Décima Quinta Reimpresión, México, 1997.

Baldor, Aurelio, *Aritmética Teórico Práctica*, Publicaciones Cultural, Décima Segunda Reimpresión, México, 1996.

Barnett Rich, *Algebra Elemental*, Mc Graw Hill, Mexico, 1970.

Bello, Ignacio, *Álgebra*, Editorial Thomson, México, 2005.

Benítez, René, *Matemáticas, Teoría y Práctica 2*, Editorial Trillas, Segunda Edición, México, 1994.

Beristain Eloisa, Campos Yolanda, Matemáticas Primer Curso, Servicios Pedagógicos S.A. Segunda Edición, México, 1981.

Biblioteca De Consulta Microsoft ® *Encarta ® 2005.* © 1993-2004 Microsoft Corporation. Reservados Todos Los Derechos.

Bosch, Carlos, Gómez, Claudia, *Álgebra*, Editorial Santillana, 2ª Edición, México, 1999.

Caballero, Martínez, Bernardez, *Matemáticas Primer Curso*, Editorial Esfinge, 23ª Edición, México, 1983.

Caballero, Martínez, Bernardez, *Matemáticas, Segundo Curso*, Editorial Esfinge, 3ª Edición, México, 1993.

Calter, Paul, *Teoría y Problemas de Fundamentos de Matemática I*, Editorial Mc Graw Hill, Colombia, 1980.

Calter, Paul, *Fundamentos de Matemáticas II*, Editorial Mc Graw Hill, México, 1986.

Cárdenas Trigos, Humberto y otros, *Matemáticas, Primer Curso*, Editorial CECSA, Tercera Edición, México, 1985.

Cuellar Carvajal, Juan Antonio, *Álgebra*, Mc Graw-Hill, México, 2004.

Curiel, Tavera, Villar, *Matemáticas 1*, Publicaciones Cultural, México, 1994.

De Oteyza, Hernández, Lam, *Álgebra*, Prentice Hall, México, 1996.

Dolciani, Wooton, Beckenbach, Chinn, *Matemáticas Modernas*, Publicaciones Cultural, Octava Reimpresión, México, 1984.

Drooyan Irving, Franklin Katherine, *Elementos de Álgebra para Bachillerato*, Editorial Limusa, Segunda Edición, México, 1994.

Escareño, Fortino; Mancera, Eduardo, *Matemáticas 2*, Editorial Trillas, Segunda Edición, México, 1994.

Fuller, Gordon, *Álgebra Elemental*, Compañía Editorial Continental, 22ª Reimpresión, México, 2000.

Gobran, Alfonse, *Álgebra Elemental*, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1990.

Ibáñez Carrasco, García Torres, *Matemáticas IV: Precálculo*, Editorial Thomson, México, 2006.

Lehmann, Charles H., *Álgebra*, Editorial Limusa, México, 1990.

Lipschutz, Seymour, *Teoría de Conjuntos y Temas Afines*, McGraw-Hill, México, 1985.

López Rueda, Gonzalo, *Matemática 1*, Editorial Sitesa, México, 1992.

Martínez Morales José Luis, *Geometría y Trigonometría*, Editorial Santillana, México, 2003.

Ortiz Campos, Francisco José, *Matemáticas-2 Álgebra y Funciones*, Publicaciones Cultural, Sexta Reimpresión, México, 2003.

Oteyza, Carrillo, Hernández, Lam. *Guía de Álgebra*. Editorial Prentice Hall. México, 2003.

Parra Cabrera, Luis, Walls Medina, Jesús, *Matemáticas Primer Curso*, Editorial Kapelusz Mexicana, Novena Edición, México, 1985.

Phares G. O´Dafer y otros, *Preálgebra*, Adisson-Wesley Iberoamericana, E.U.A. 1992.

Portilla Chimal, Enrique, *Matemáticas: Curso 1, Modulo 1*, Editorial Trillas, 1ª Edición, México, 1983.

Rangel, Luz María, *Funciones y Relaciones*, Editorial Trillas, México, 2000.

Robledo Vázquez, Cruz Ramos, *Matemática uno*, Editorial Trillas, Segunda Reimpresión, México, 1984.

Robledo Vázquez, Cruz Ramos, *Matemática dos*, Editorial Trillas, Quinta Edición, México, 1984.

Ruiz Basto, Joaquín, *Matemáticas Precálculo: funciones y aplicaciones*, Publicaciones Cultural, Primera Edición, México, 2006.

Serralde, Zúñiga, *Matemáticas I, Ediciones Pedagógicas*, 3ª Edición, México, 1983.

Silva, Lazo, *Fundamentos de Matemáticas*, Editorial Limusa, 6ª Edición, México, 1998.

Sobel, Lerner, *Álgebra*, Prentice Hall, Cuarta Edición, México, 1996.

Smith, Stanley A. y otros, *Álgebra*, Addison-Wesley Iberoamericana, E. U. A., 1992.

Teoría de Conjuntos, Ediciones Cultural, España, 1986.

Zúñiga, Serralde, *Matemáticas dos*, Ediciones Pedagógicas S. A., México, 1995.

http://ciencias.bc.inter.edu/ntoro/fexp.htm.

http://es.wikipedia.org/wiki/Trigonometr%C3%ADa.

http://huitoto.udea.edu.co/Matematicas/2.1.html.

http://olmo.cnice.mecd.es/~agog0016/paginas/exp_loga.htm.

http://usuarios.lycos.es/calculo21/id396.htm.

http://www.phy6.org/stargaze/Mtrig6.htm.

http://www.sectormatematica.cl/media/diferenciado/NM4_funciones_trigonometricas.doc